REPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix-Travail-Patrie
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
UNIVERSITE DE MAROUA

REPUBLIC OF CAMEROON
Peace-Work-Fatherland
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION
THE UNIVERSITY OF MAROUA

ECOLE NORMALE SUPERIEUR DE MAROUA (ENSM)

CONCOURS D'ENTREE EN 1ERE ANNEE SESSION DE 2013

Epreuve de : MATHEMATIQUES

SERIE : INFORMATIQUE

Exercice 1 :

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z = 0$
2. Montrer que les solutions sont les affixes de quatre points cocycliques

Exercice 2 :

On pose: $S_n(x) = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n-2}$ où $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

1.
   a. Montrer que $S_n(x) = \frac{x^{2n}-1}{x^2-1}$ pour $x^2 \neq 1$ et $S_n(-1) = S_n(1) = n$
   b. En déduire que $\lim_{x\to a} \frac{x^{2n}-1}{x^2-1} = S_n(a)$ pour tout $a \in \mathbb{C}$
2.
   a. Vérifier que les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $x^{2n} - 1 = 0$ sont les nombres complexes $1, -1, z_k$ et $\bar{z}_k$ où $z_k = \left[1, \frac{k\pi}{n}\right]$ et $k \in \{1,2, \ldots n-1\}$
   b. En déduire que pour $x^2 \neq 1$,

$$x^{2n} - 1 = (x^2 - 1)\prod_{k=1}^{n-1}(x - z_k)(x - \bar{z}_k)$$

$$\text{Et } S_n(x) = \prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2 - 2x\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1\right)$$

Exercice 3 :

Soit ln la fonction logarithme népérien. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$

1. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :
   $\int_1^a \ln(x)\,dx = a\ln a - a + 1.$
   On pose $f(x) = a\ln a - a + 1$
2. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}_+^*$

3. Construire la courbe (C) de f dans un repère orthonormé.
4. En déduire que pour tout entier naturel k, l'équation $f(a) = k$ a exactement une solution notée a_k.
5.
   a. Calculer a_0 et a_1
   b. A l'aide des variations de f, montrer que la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante.
6. Montrer que $\forall\, k \in \mathbb{N}, \int_{a_k}^{a_{k+1}} \ln(x)\, dx = 1$
7. En déduire que :
   a. $\forall\, k \in \mathbb{N}, (a_{k+1} - a_k)\ln(a_k) \leq 1 \leq (a_{k+1} - a_k)\ln(a_{k+1})$
   b. $\lim_{k\to+\infty} u_k = +\infty$

Exercice 4 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} \sqrt[3]{x+2y} + \sqrt[3]{x-y+2} = 3 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$
2. Simplifier l'expression $\dfrac{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha - \cos 6\alpha - \sin 6\alpha}{\sin 4\alpha + 2\sin^2 2\alpha - 1}$