

EXERCICE 1 : 1. a) Le discriminant $\Delta = -12$ donc il y a deux solutions complexes : $u = \frac{6+2i\sqrt{3}}{2} = 3+i\sqrt{3}$ et

$\bar{u} = 3-i\sqrt{3}$. b) On a $|u| = |\bar{u}| = 2\sqrt{3}$; notons $\theta = \arg(u)$;

on a $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{1}{2}$, d'où $\arg(u) = \frac{\pi}{6} [2\pi]$ et $\arg(\bar{u}) = -\frac{\pi}{6} [2\pi]$.

2. a) $u-4 = -1+i\sqrt{3} = 2(\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3}))$.

b) $\left| \frac{u}{u-4} \right| = \frac{|u|}{|u-4|} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ et

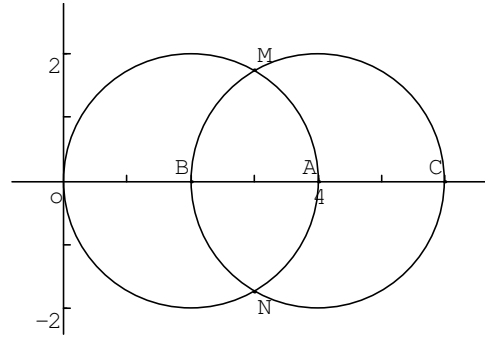
$$\arg\left(\frac{u}{u-4}\right) = \arg(u) - \arg(u-4) = \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} [2\pi].$$

Les points O, A, M, N sont sur le cercle de centre B et de rayon 2 :

$OB = BA = 2$; $BM = BN = |u-2| = 2$.

Les points B, C, M, N sont sur le cercle de centre A et de rayon 2 :

$AB = AC = 2$; $AM = AN = |u-4| = 2$.



EXERCICE 2 : 1. a) L'affixe de A_1 : $z_1 = 1+i$; l'affixe de A'_1 : $z'_1 = iz_1 = -1+i$; l'affixe de A_2 : $z_2 = \frac{z_1 + z'_1}{2} = i$;

l'affixe de A'_2 : $z'_2 = iz_2 = -1$; l'affixe de A_3 : $z_3 = \frac{z_2 + z'_2}{2} = \frac{-1+i}{2}$. b) $r_0 = |z_0| = 2$, $r_1 = |z_1| = \sqrt{2}$, $r_2 = |z_2| = 1$,

$r_3 = |z_3| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\theta_0 = 0 [2\pi]$, $\theta_1 = \frac{\pi}{4} [2\pi]$, $\theta_2 = \frac{\pi}{2} [2\pi]$, $\theta_3 = \frac{3\pi}{4} [2\pi]$

2. a) $z_{n+1} = \frac{z_n + z'_n}{2} = \frac{z_n + iz_n}{2} = z_n \frac{(1+i)}{2}$; la suite des nombres complexes (z_n)

est une suite géométrique de raison $\frac{1+i}{2}$ et de premier terme $z_0 = 2$; donc

$$z_n = 2 \left(\frac{1+i}{2} \right)^n.$$

b) On a $r_{n+1} = |z_{n+1}| = |z_n| \left| \frac{1+i}{2} \right| = r_n \times \frac{1}{\sqrt{2}}$; donc la suite (r_n) est géométrique de

raison $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et de premier terme $r_0 = 2$; donc $r_n = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n$. On a $\theta_{n+1} = \arg(z_{n+1}) = \arg(z_n) + \arg\left(\frac{1+i}{2}\right) = \theta_n + \frac{\pi}{4}$;

donc la suite (θ_n) est arithmétique de raison $\frac{\pi}{4}$ et de premier terme $\theta_0 = 0$; donc $\theta_n = n \frac{\pi}{4}$.

c) Comme $0 < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 0$; ce qui signifie que la distance OA_n tend vers 0.

d) $z_{n+8} = r_{n+8} e^{i\theta_{n+8}} = r_n \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^8 e^{i(\theta_n + 8 \frac{\pi}{4})} = z_n \times \frac{1}{16} e^{i2\pi} = \frac{1}{16} z_n$, donc $r_{n+8} = \frac{1}{16} r_n$ et $\theta_{n+8} = \theta_n$.

e) $A_n A_{n+1} = |z_{n+1} - z_n| = \left| (z_n - z_{n-1}) \left(\frac{1+i}{2} \right) \right| = |z_n - z_{n-1}| \left| \frac{1+i}{2} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} A_{n-1} A_n$. Soit $u_n = A_n A_{n+1}$; on a alors, pour tout entier $n \geq$

1, $u_n = \frac{1}{\sqrt{2}} u_{n-1}$; donc la suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et de premier terme $u_0 = A_0 A_1 = \sqrt{2}$; Ainsi

$A_n A_{n+1} = u_n = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n$. La longueur de la ligne brisée $A_0 A_1 A_2 \dots A_n$ est la somme des longueurs $A_n A_{n+1}$; donc

$$l_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} = u_0 \frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2}{\sqrt{2}-1} \times \left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \right). \text{ Et } \lim_{n \rightarrow +\infty} l_n = \frac{2}{\sqrt{2}-1} = 2(1+\sqrt{2}).$$

