DEVOIR MAISON N° 5

EXERCICE 1

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\dfrac{z-2}{z-1} = z$. Donner les solutions sous la forme algébrique et trigonométrique.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\dfrac{z-2}{z-1} = i$. Donner la solution sous la forme algébrique.

3. On considère les points A, B et M d'affixes respectives 1, 2 et z.

a) Interpréter géométriquement le module et un argument de $\dfrac{z-2}{z-1}$.

b) Montrer, à l'aide d'une interprétation géométrique que toute solution de l'équation $\left(\dfrac{z-2}{z-1}\right)^n = i$, où n désigne un entier naturel non nul, a une partie réelle égale à $\dfrac{3}{2}$.

Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\dfrac{z-2}{z-1}\right)^2 = i$.

EXERCICE 2

On considère le polynôme P défini par $P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$.
1. Calculer $P(i\sqrt{3})$ et $P(-i\sqrt{3})$.
2. Montrer qu'il existe un polynôme Q tel que $P(z) = (z^2 + 3)Q(z)$.
3. Résoudre dans l'équation $P(z) = 0$.
4. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, montrer que les images A, B, C et D des quatre solutions de l'équation précédente appartiennent à un même cercle dont on déterminera le centre et le rayon. Représenter ces quatre points et le cercle.

EXERCICE 3

On considère trois points A, B et C distincts du cercle trigonométrique d'affixes respectives a, b, c.
1. Faire la figure sur GeoGebra. Construire les points D, E et F d'affixes respectives $a + b$, $b + c$ et $c + a$ et le cercle circonscrit au triangle DEF.
2. Déterminer le centre et le rayon de ce cercle circonscrit en fonction de a, b et c.