www.touslesconcours.info

CORRECTION DEVOIR SURVEILLE N°5

EXERCICE 1 : 1. On a $u_0 = 1 \geq 1$; supposons que pour un certain n , $u_n \geq 1$; et montrons que $u_{n+1} \geq 1$: $\ln(u_n) \geq 0$,car $u_n \geq 1$, donc $\ln(u_{n+1}) = 1 + \ln(u_n) \geq 1 = \ln e$, donc $u_{n+1} \geq e$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geq 1$.

2. On a $\ln(u_{n+1}) = 1 + \ln(u_n)$, donc $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = 1$, donc $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = 1 = \ln e$, donc pour tout entier naturel n,

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e$. Ainsi $u_{n+1} = e(u_n)$ et la suite (u_n) est géométrique de raison e.

3. On a donc $u_n = u_0\,(e)^n = e^n$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ car la raison est strictement supérieure à 1.

4. a) On a $v_n = \ln u_n = \ln(e^n) = n$. Donc $v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

b) De plus, $v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n = \ln u_0 + \ln u_1 + \ldots + \ln u_n = \ln(u_0 \times u_1 \times u_2 \times ... \times u_n) = \ln(s_n)$.

Donc $\ln(s_n) = \frac{n(n+1)}{2}$. Ainsi $s_n = e^{\frac{n(n+1)}{2}}$; et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)}{2} = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = +\infty$.

EXERCICE 2 : $z_1 = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{e^{i\theta} + e^{-i\theta}} = \frac{2i\sin\theta}{2\cos\theta} = i\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = i\tan\theta$ est un imaginaire pur ; donc $|z_1| = |\tan\theta|$; si θ $\in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, $\arg(z_1) = \frac{\pi}{2}$ et si θ $\in \left]-\frac{\pi}{2};0\right[$, $\arg(z_1) = -\frac{\pi}{2}$.

$$z_2 = \frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta} = \frac{1+i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1-i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} = \frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} = e^{2i\theta}$$. Donc $|z_2| = 1$; $\arg(z_2) = 2\theta$.

EXERCICE 3 : 1. On a $u = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $\overline{u} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

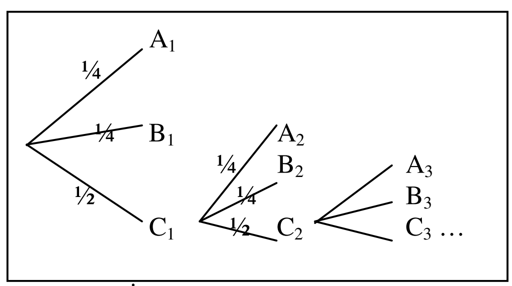
2. a) On a $S_n = u^n + \overline{u}^n = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n + \left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n\left(e^{i\frac{n\pi}{4}} + e^{-i\frac{n\pi}{4}}\right)$.

b) Par les formules d'Euler, $\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} = \cos\theta$, donc $e^{i\frac{n\pi}{4}} + e^{-i\frac{n\pi}{4}} = 2\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$ et $S_n = 2\left(\sqrt{2}\right)^n \cos(n\frac{\pi}{4})$.

c) $S_n = 0$ si $\cos(n\frac{\pi}{4}) = 0$, soit $n\frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, soit $n = \pm 2 + 8k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

d) Si n est pair, $n = 2p$ (p entier naturel) ; $S_n = 2\left(\sqrt{2}\right)^n \cos(n\frac{\pi}{4}) = 2\times 2^p \cos(\frac{p\pi}{2}) = 2^{p+1}\times(\pm 1)$ ou $S_n = 0$ suivant les valeurs de p ; et S_n est bien un entier relatif.

EXERCICE 4 : 1. $p(A_1) = ¼$; $p(B_1) = ¼$; $p(C_1) = ½$.



2. a) $p_{C_1}(A_2) = ¼$, $p_{C_1}(B_2) = ¼$, $p_{C_1}(C_2) = ½$.

b) Pour tout $n > 1$, $p_{C_{n-1}}(A_n) = ¼$, $p_{C_{n-1}}(B_n) = ¼$, $p_{C_{n-1}}(C_n) = ½$.

c) Pour tout $n > 1$, par la formule des probabilités totales , puisque A_{n-1} , B_{n-1} , C_{n-1} forment une partition,

$p(C_n) = p(C_n \cap A_{n-1}) + p(C_n \cap B_{n-1}) + p(C_n \cap C_{n-1}) = p(C_n \cap C_{n-1})$,

car les événements A_n et C_n d'une part et B_n et C_n d'autre part sont incompatibles. Donc $p(C_n) = p_{C_{n-1}}(C_n)\times p(C_{n-1}) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}$; on a aussi

$p(A_n) = p(A_n \cap C_{n-1}) = p_{C_{n-1}}(A_n)\times p(C_{n-1}) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n+1}}$ et $p(B_n) = p(B_n \cap C_{n-1}) = p_{C_{n-1}}(B_n)\times p(C_{n-1}) = p(A_n)$.

3. a) La probabilité p_n est $p_n = p(B_1) + p(B_2) + ... + p(B_n) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^{n+1}} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{2^{k+1}}$.

b) On a $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{4}\times\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-1/2} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$, et la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de p_n est ½ (puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n} = 0$).