

CORRECTION DEVOIR SURVEILLE N° 3

EXERCICE 1: a) On calcule le module et un argument de z_1 : $|z_1| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{8}{16}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Posons $\arg(z_1) = \theta_1$; $\cos(\theta_1) = \frac{\frac{\sqrt{6}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\theta_1) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2}$; ainsi $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$ $[2\pi]$.

On calcule le module et un argument de z_2 : $|z_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

Posons $\arg(z_2) = \theta_2$; $\cos(\theta_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\theta_2) = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$; ainsi $\theta_2 = \frac{7\pi}{4}$ $[2\pi]$.

La forme trigonométrique de $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$ et celle de $z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$.

$$b) Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})(1+i)}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}.$$

c) Le module de Z est égale à $\frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{1}{2}$ et un argument de Z est égale à $\arg(z_1) - \arg(z_2) = \frac{\pi}{6} - \frac{7\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$ $[2\pi]$;

$$d) \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\Re(Z)}{|Z|} = \frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}+\sqrt{2} \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\Im(Z)}{|Z|} = \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}-\sqrt{2}.$$

$$\text{EXERCICE 2: 1. a) } \frac{z^2}{\bar{z}} = \frac{(1+i)^2}{1-i} = \frac{(2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = -1+i.$$

b) On sait que $z^2 = (1+i)^2 = 2i$ et que $i^2 = -1$, donc $z^4 = -4$ et $z^8 = 16$, donc le plus petit entier naturel n tel que z^n soit un réel positif est 8.

$$2. a) \frac{z^2}{\bar{z}} = \frac{(x+iy)^2}{x-iy} = \frac{(x^2-y^2+i(2xy))(x+iy)}{(x-iy)(x+iy)} = \frac{x^3-3xy^2+i(-y^3+3x^2y)}{x^2+y^2} = \frac{x^3-3xy^2}{x^2+y^2} + i \frac{-y^3+3x^2y}{x^2+y^2}.$$

b) $\frac{z^2}{\bar{z}}$ est imaginaire pur si sa partie réelle est nulle c'est-à-dire si $\frac{x^3-3xy^2}{x^2+y^2} = 0$, soit $x^3-3xy^2 = x(x^2-3y^2) = 0$, soit $x = 0$, ou $x^2 = 3y^2$, soit $x = y\sqrt{3}$ ou $x = -y\sqrt{3}$. Donc $z = ix$, $z = x + ix\sqrt{3}$ ou $z = x - ix\sqrt{3}$ avec x réel non nul.

$$\text{EXERCICE 3: 1. a) } P(-2) = (-2)^3 + 8 = -8 + 8 = 0 \text{ et } P(i) = i^3 + 8 = 8 - i.$$

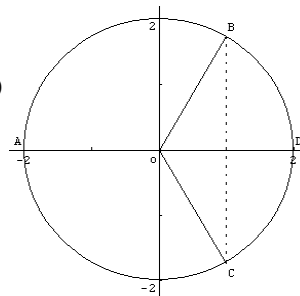
b) Comme $P(-2) = 0$, le polynôme P se factorise par $(z+2)$; et $P(z) = (z+2)(az^2 + bz + c)$ = $az^3 + (2a+b)z^2 + (c+2b)z + 2c$. Par identification, on trouve $a = 1$, $b = -2$, $c = 4$.

Donc $P(z) = (z+2)(z^2 - 2z + 4)$.

c) On peut alors résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$: $z+2 = 0$, soit $z = -2$, ou $z^2 - 2z + 4 = 0$; $\Delta = 4 - 16 = -12 < 0$, donc les deux solutions sont complexes et

$$\text{conjuguées : } z_1 = \frac{2+i\sqrt{12}}{2} = 1+i\sqrt{3} \text{ et } z_2 = \frac{2-i\sqrt{12}}{2} = 1-i\sqrt{3}.$$

b) Ces quatre points sont situés sur le cercle de centre O et de rayon 2, car $OA = |z_A| = 2$, $OB = |z_B| = 2$...



$$\text{EXERCICE 4: 1. a) On a } d_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n - v_n}{3} = \frac{1}{3} d_n, \text{ donc la suite } (d_n) \text{ est géométrique de raison } \frac{1}{3} \text{ et de}$$

premier terme $d_0 = u_0 - v_0 = 6$, donc $d_n = 6 \left(\frac{1}{3}\right)^n > 0$ puisque 6 et 3 sont strictement positifs.

$$b) \text{ Montrons que la suite } (u_n) \text{ est décroissante : } u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + v_n}{3} - u_n = \frac{-u_n + v_n}{3} = \frac{-d_n}{3} < 0, \text{ donc } u_{n+1} < u_n \text{ et } (u_n)$$

$$\text{est strictement décroissante. Montrons que la suite } (v_n) \text{ est croissante : } v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 2v_n}{3} - v_n = \frac{u_n - v_n}{3} = \frac{d_n}{3} > 0,$$

donc $v_{n+1} > v_n$ et (v_n) est strictement croissante. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = 0$ car la raison de la suite (d_n) est strictement comprise entre 0 et 1. Donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

c) On peut en déduire que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite l .

$$2. a) \text{ On a } s_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} + \frac{u_n + 2v_n}{3} = \frac{3u_n + 3v_n}{3} = u_n + v_n = s_n \text{ pour tout entier naturel } n. \text{ Donc la suite } (s_n) \text{ est une suite constante } = s_0 = 8.$$

$$b) \text{ Ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = 8 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l, \text{ et donc } 2l = 8, \text{ d'où } l = 4.$$

La limite des suites (u_n) et (v_n) est 4.