CORRECTION DEVOIR MAISON N° 2 BRAIN-PREPA

A. 1. Les limites du polynôme f en $+\infty$ et en $-\infty$ sont donnés par la limite du terme de plus haut degré ; donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2. La fonction f est un polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$, donc continue sur $\mathbb{R}$.

3. On a $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$; c'est un polynôme du second degré ; pour déterminer son signe, on calcule son discriminant : $\Delta = (2a)^2 - 4\times3\times b = 4a^2 - 12b = 4(a^2 - 3b)$.

Si $\Delta > 0$, il y a 2 solutions x_1 et x_2 à l'équation $f'(x) = 0$; le signe de $f'(x)$ est positif pour les valeurs extérieurs aux racines et négatif pour les valeurs entre les racines.

Si $\Delta = 0$, il y a une solution à l'équation $f'(x) = 0$; et $f'(x)$ est positif.

Si $\Delta < 0$, il n'y a pas de solution à l'équation $f'(x) = 0$; le signe de $f'(x)$ est le signe du coefficient de x^2 donc positif.

4. Si $\Delta < 0$ ou si $\Delta = 0$, la dérivée est positive, donc f est strictement croissante et continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$. Si $\Delta > 0$, on utilise le théorème des valeurs intermédiaires : la fonction f est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Donc l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

5. Le point S ($-\frac{a}{3}$; $f(-\frac{a}{3})$) est un centre de symétrie pour la courbe C si pour tout x de $\mathbb{R}$, on a

$f(\frac{-a}{3} - x) + f(\frac{-a}{3} + x) = 2f(\frac{-a}{3})$; on a bien $f(\frac{-a}{3} - x) + f(\frac{-a}{3} + x) = \frac{4a^3 - 18ab + 54c}{27} = 2f(\frac{-a}{3})$.

B. 1. Une équation de (D_α) est donnée par $y = f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha)$

2. On a $g'(x) = f'(x) - f'(\alpha)$ et $g''(x) = f''(x)$. Les variations de g' sont données par le signe de $g''(x)$ donc par le signe de $f''(x) = 6x + 2a$. Donc si $x < -\frac{a}{3}$, alors $f''(x)$ est négative et g' est décroissante ; si $x \geq -\frac{a}{3}$ alors $f''(x)$ est positive et g' est croissante. On a $g'(-\frac{a}{3}) = f'(-\frac{a}{3}) - f'(\alpha) = 3(\frac{-a}{3})^2 + 2a(\frac{-a}{3}) - 3\alpha^2 - 2a\alpha = -\frac{1}{3}(a + 3\alpha)^2 \leq 0$.

3. Sur l'intervalle $]-\infty$; $-\frac{a}{3}[$, la fonction g' est continue et strictement décroissante dans $]g'(-\frac{a}{3})$; $+\infty[$; ces deux bornes sont de signes contraires, donc l'équation $g'(x) = 0$ admet une unique solution dans $]-\infty$; $-\frac{a}{3}[$; de même, sur l'intervalle $[-\frac{a}{3}$; $+\infty[$, la fonction g' est continue et strictement croissante dans $]g'(-\frac{a}{3})$; $+\infty[$; ces deux bornes sont de signes contraires, donc l'équation $g'(x) = 0$ admet une unique solution dans $[-\frac{a}{3}$; $+\infty[$. On a

$g'(\alpha) = f'(\alpha) - f'(\alpha) = 0$ donc α est une des solutions ; l'autre β vérifie $g'(\beta) = f'(\beta) - f'(\alpha) = 0$; soit $f'(\beta) = f'(\alpha)$; soit $3\beta^2 + 2a\beta = 3\alpha^2 + 2a\alpha$; on résout cette équation d'inconnue β et on trouve $\Delta = 4(a + 3\alpha)^2$; il y a deux solutions : α et $\beta = \frac{-2a}{3} - \alpha$. On vérifie que $g(\beta) = 4(\frac{a}{3} + \alpha)^3$.

4. Signe de $g'(x)$: positif pour les valeurs extérieurs aux racines α et β, et négatif entre ces racines.

5. Signe de $g(x)$:

$\alpha > -\frac{a}{3}$		$\alpha < -\frac{a}{3}$		$\alpha = -\frac{a}{3}$	
x	$-\infty$ β $-a/3$ α $+\infty$	x	$-\infty$ α $-a/3$ β $+\infty$	x	$-\infty$ $\alpha=\beta$ $+\infty$
$g'(x)$	+ 0 − 0 +	$g'(x)$	+ 0 − 0 +	$g'(x)$	+ 0 +
$g(x)$	↗ ↘ 0 ↗	$g(x)$	↗ 0 ↘ ↗	$g(x)$	↗

6. Localement, autour du point d'abscisse α, la position de la tangente (D_α) par rapport à C est donné par le signe de $g(x)$. D'après la question précédente, si $\alpha > -\frac{a}{3}$, alors (D_α) est au-dessous de C ; si $\alpha < -\frac{a}{3}$, alors (D_α) est au-dessus de C ; et si $\alpha = -\frac{a}{3}$, alors (D_α) coupe C.

7. Si $\alpha \neq -\frac{a}{3}$, l'équation $g(x) = 0$ a deux solutions, donc (D_α) coupe C en deux points. Sinon un seul point ...

8. Il suffit de prendre une fonction f de la forme $(x-2)^2(x-3) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$; d'où $a = -7$, $b = 16$, $c = -12$.