DEVOIR MAISON N° 2 BrainPrepa (www.brainprepa.com)

On considère les nombres réels a, b, c et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

A. Quelques généralités sur f :

1. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de f.
3. Etudier les variations de f en fonction du signe de $a^2 - 3b$.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur $\mathbb{R}$.
5. Montrer que le point S d'abscisse $-\frac{a}{3}$ est un centre de symétrie pour la courbe C représentative de la fonction f.

B. Positions des tangentes de C :

1. On considère la droite (D_α), tangente à la courbe C au point d'abscisse α. Déterminer une équation de (D_α).
2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - [f'(\alpha)(x-\alpha) + f(\alpha)]$. Déterminer $g'(x)$ et $g''(x)$.

Etudier les variations de g'. Montrer que $g'(-\frac{a}{3}) = -\frac{1}{3}(a+3\alpha)^2$.

3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β sur $\mathbb{R}$. Ecrire β en fonction de α et a.

Montrer que $g(\beta) = 4(\frac{a}{3} + \alpha)^3$. 4. En déduire le signe de $g'(x)$.

5. Etudier le signe de $g(x)$ en séparant les trois cas : $\alpha > -\frac{a}{3}$, $\alpha < -\frac{a}{3}$ et $\alpha = -\frac{a}{3}$.
6. Localement, autour du point d'abscisse α, préciser la position de la tangente (D_α) par rapport à C.
7. Montrer que, si $\alpha \neq -\frac{a}{3}$, alors (D_α) coupe C en deux points. Que se passe-t-il lorsque $\alpha = -\frac{a}{3}$?
8. Trouver des valeurs de a, b, c pour lesquelles l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions.