

**DEVOIR MAISON N° 4**

---

**EXERCICE 1**

On considère les deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies par la donnée de  $u_0$  et  $v_0$  ( $u_0 < v_0$ ), et pour tout entier naturel  $n$  par :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 2v_n}{3}.$$

1. On considère la suite  $(w_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $w_n = v_n - u_n$ .

a) Montrer que la suite  $(w_n)$  est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.

b) Exprimer  $w_n$  en fonction de  $n$  et préciser la limite de la suite  $(w_n)$ .

2. a) Étudier les variations des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ .

b) Montrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

3. On considère à présent la suite  $(t_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $t_n = \frac{2}{3}u_n + v_n$ .

a) Démontrer que la suite  $(t_n)$  est constante.

b) En déduire les limites des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ .

**EXERCICE 2**

On considère la suite numérique  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par  $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} k(k+1)$ .

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite  $(u_n)$ .

2. Montrer que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $u_{n+1} = u_n \frac{n}{n+1} + n + 2$ .

3. A l'aide de la calculatrice, déterminer  $u_{10}$  puis  $u_{20}$ .

4. a) Représenter graphiquement les 10 premiers termes de la suite  $(u_n)$ .

b) Conjecturer le type de courbe sur lequel les points  $(n; u_n)$  sont situés.

5. a) Quelle conjecture peut-on faire sur l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  ?

b) Démontrer cette conjecture.

**EXERCICE 3**

1. Montrer que la dérivée d'une fonction paire est une fonction impaire.

2. On considère une fonction  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}$ , de dérivée impaire. On pose, pour tout réel  $x$ ,  $g(x) = f(x) - f(-x)$ .

Montrer que  $g$  est une fonction constante. Déterminer cette constante. Que peut-on en déduire pour  $f$  ?

3. On considère une fonction  $f$  définie, dérivable sur  $\mathbb{R}$  et paire. Soit  $a$  un réel quelconque.

Montrer que les tangentes à la courbe représentative de  $f$  aux points d'abscisses  $a$  et  $-a$  sont sécantes en un point de l'axe des ordonnées.

4. On considère une fonction  $f$  définie, dérivable sur  $\mathbb{R}$  et impaire. Soit  $a$  un réel quelconque.

Justifier la position des tangentes à la courbe représentative de  $f$  aux points d'abscisses  $a$  et  $-a$ .