CORRECTION DEVOIR MAISON N° 3 BRAIN-PREPA

EXERCICE 1 : A . 1) La fonction f_1 est définie sur IR\{-0,5}, c'est une fonction rationnelle, donc elle est continue et dérivable sur [0 ; 1]. On a $f_1 o f_1(x) = \dfrac{1-\left(\dfrac{1-x}{1+2x}\right)}{1+2\left(\dfrac{1-x}{1+2x}\right)} = \dfrac{1+2x-1+x}{1+2x+2-2x} = \dfrac{3x}{3} = x$. Donc f_1 vérifie bien (1) et (2).

2) La fonction f_2 est définie sur IR+ , est une somme de fonctions continues et dérivables sur]0 ; +∞[, donc elle vérifie (1). $f_2'(x) = 1 - 2\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$; sur l'intervalle]0 ; 1], cette dérivée est négative donc f_2 est décroissante sur [0 ; 1].

Cette fonction n'est pas dérivable en 0, et on trouve $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f_2(0+h) - f_2(0)}{h} = -\infty$, donc la tangente en 0 est verticale.

$f_2'(1) = 0$, donc en 1, la tangente est horizontale.

$f_2 o f_2(x) = (x - 2\sqrt{x} + 1) - 2\sqrt{x - 2\sqrt{x} + 1} + 1 = x - 2\sqrt{x} + 2 - 2\sqrt{(\sqrt{x}-1)^2} = x - 2\sqrt{x} + 2 - 2(1-\sqrt{x}) = x$; donc f_2 vérifie (2).

B. Si la fonction *f* vérifie (1), alors elle est continue sur [0 ; 1] et dérivable sur]0 ; 1[. On a pour tout *x* de]0 ; 1[, $(fof)'(x) = f'(f(x)) \times f'(x) = 1$ puisque d'après (2) , *fof(x) = x* ; donc la dérivée ne s'annule pas, donc ne change pas de signes et donc la fonction *f* est strictement monotone. Pour tout *x* de [0 ; 1], il existe *y* tel que *f(x) = y* et *fof(x) = f(y) = x* qui appartient à [0 ; 1], donc les images par *f* sont dans cet intervalle ; ainsi, *f* est continue, strictement monotone de [0 ; 1] dans [0 ; 1].
Soit M (*x ; y*) un point de la courbe représentative de *f* ; on a alors *f(x) = y* et *fof(x) = f(y) = x* ; ainsi le point M'(*y ; x*) est aussi un point de la courbe ; donc la droite d'équation *y = x* est un axe de symétrie de cette courbe.
Si *f* est croissante, alors pour tout *a* et *b* de [0 ; 1], avec *a < b* on a *f(a) < f(b)* . Donc si *x ≤ f(x)* alors *f(x) ≤ fof(x) = x* et donc *f(x) = x* ; si *x ≥ f(x)* alors *f(x) ≥ fof(x) = x* et donc *f(x) = x* . Donc si *f* est croissante alors *f(x) = x* .
d) Si *f* est décroissante, *f(0)* = 1 et *f(1)* = 0 : soit *a = f(0)*, alors *f(a) = fof(0) = 0* ; on a 0 ≤ *a* ≤ 1 d'où (*f* étant décroissante) *f(1) ≤ f(a) ≤ f(0) = a* , d'où *f(1) = 0* et *f(0) = fof(1) = 1* .
2) Si le degré du polynôme P est *n* alors le degré de PoP est n^2 ; donc $n^2 = 1$ et $n = 1$. Les polynômes cherchés sont de la forme P(*x*) = *ax + b*. On obtient PoP(*x*) = *a(ax + b) + b = x* et par identification, on trouve $a^2 = 1$ et $ab + b = 0$; d'où si *a* = 1 , P(*x*) = *x* et si *a* = -1 , P(*x*) = -*x + b* (*b* réel quelconque).

3) Soit *f(x)* = $\dfrac{ax+b}{cx+d}$; on a $fof(x) = \dfrac{a\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)+b}{c\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)+d} = \dfrac{(a^2+bc)x+ab+bd}{(ac+cd)x+bc+d^2} = x$ d'où $ac + cd = 0$, soit $a + d = 0$.

EXERCICE 2 : a) Soit (P_n) la propriété : u_n et v_n sont strictement positifs ; (P_0) est vraie ; supposons (P_n) vraie et montrons que (P_{n+1}) est vraie : $u_n > 0$ et $v_n > 0$, donc $u_{n+1} = \dfrac{2}{\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{v_n}} > 0$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2} > 0$; donc pour tout entier *n* on a u_n et v_n sont strictement positifs .

b) $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2} - \dfrac{2u_nv_n}{u_n+v_n} = \dfrac{(u_n+v_n)^2 - 4u_nv_n}{2(u_n+v_n)} = \dfrac{(v_n-u_n)^2}{2(u_n+v_n)} > 0$ et donc $v_{n+1} < u_{n+1}$; d'où, ∀ *n*, $u_n < v_n$.

c) On a $2x > 0$, d'où $0 < y - x < y + x$ d'où $\dfrac{y-x}{y+x} < 1$ d'où $\dfrac{y-x}{2(y+x)} < \dfrac{1}{2}$. Ainsi

$v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{(v_n-u_n)(v_n-u_n)}{2(u_n+v_n)} < \dfrac{1}{2}(v_n-u_n)$. Soit (P_n) la propriété : $v_n - u_n < \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (v_0-u_0)$; (P_0) est vraie ; supposons (P_n) vraie et montrons que (P_{n+1}) est vraie : $v_{n+1} - u_{n+1} < \dfrac{1}{2}(v_n-u_n) < \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n(v_0-u_0) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}(v_0-u_0)$;

donc (P_n) vraie pour tout entier *n*. f) Comme $0 < ½ < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$. Donc, par le théorème des gendarmes, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

g) La suite (u_n) est croissante : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{(v_n-u_n)u_n}{u_n+v_n}>0$; et la suite (v_n) est décroissante : $v_{n+1}-v_n=\dfrac{u_n-v_n}{2}<0$;

Donc ces deux suites sont adjacentes.

h) $u_{n+1}v_{n+1}=\dfrac{2u_nv_n}{u_n+v_n}\dfrac{u_n+v_n}{2}=u_nv_n=u_0v_0=ab$, donc le produit est constant. Comme les suites sont adjacentes, elles convergent vers la même limite l et on a $\lim\limits_{n\to+\infty}u_nv_n=l^2=ab$ et donc $l=\sqrt{ab}$.

i) On pose $a = 2$ et $b = 3$; les suites (u_n) et (v_n) convergent vers $\sqrt{6}$; on calcule donc les premiers termes de la suite et dès que la différence (v_n-u_n) est inférieure à 10^{-5} : on a $u_1=\dfrac{12}{5}$ et $v_1=\dfrac{5}{2}$; $u_2=\dfrac{120}{49}$ et $v_2=\dfrac{49}{20}$; $u_3=\dfrac{11760}{9602}$ et $v_3=\dfrac{4801}{1960}$ et $v_3-u_3<10^{-5}$; donc $\dfrac{11760}{4801}<\sqrt{6}<\dfrac{4801}{1960}$.