

EXERCICE 1 : La droite (d) a pour équation $y = x + 2$ et la droite (d') a pour équation $x = -1$; donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x+2)) = 0$ et -1 est une valeur interdite de la fonction f . Ainsi $a = 1$, $b = 2$, $d = 1$.

De plus, le point A(0 ; 3) est un point de la courbe C, donc $f(0) = 2 + \frac{c}{0+1} = 3$, donc $c = 1$.

EXERCICE 2 : a) L'axe des ordonnées est un axe de symétrie de la courbe C si la fonction f est paire : pour tout réel x , $f(-x) = \sqrt{4(-x)^2 + 3} = \sqrt{4x^2 + 3} = f(x)$. Donc la fonction f est paire.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 + 3} = +\infty$, en utilisant les limites des fonctions composées.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + 3} = +\infty$, en utilisant les limites des fonctions composées.

c) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle est la composée de la fonction carrée (dérivable sur $\mathbb{R}$) et de la fonction $x \mapsto \sqrt{4x^2 + 3}$ (dérivable sur $[0 ; +\infty[$) ; de plus, pour tout réel x , $4x^2 + 3$ est strictement positif, donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

d) La dérivée de f est $f'(x) = \frac{8x}{2\sqrt{4x^2 + 3}} = \frac{4x}{\sqrt{4x^2 + 3}}$. Le signe de cette dérivée est celui du numérateur, donc la

fonction f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$ et décroissante sur $] -\infty ; 0]$.

e) Pour montrer que la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à C en $+\infty$, il suffit de calculer la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x)$;

on a $\sqrt{4x^2 + 3} - 2x = \frac{4x^2 + 3 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 + 3} + 2x} = \frac{3}{\sqrt{4x^2 + 3} + 2x}$ et la limite du dénominateur en $+\infty$ est $+\infty$,

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = 0$. Donc la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à C en $+\infty$.

EXERCICE 3 : a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6}{x} = 0$.

b) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction rationnelle de dénominateur strictement positif.

$f'(x) = \frac{6(x^2 + 1) - 6x \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{6(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$; cette dérivée est du signe du numérateur donc du signe de $1 - x^2$; d'où le

tableau de variations :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0
		-3				

c) Une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0 est $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = 6x$.

d) La position relative de C et de T est donnée par le signe de

$f(x) - 6x = \frac{6x}{x^2 + 1} - 6x = \frac{-6x^3}{x^2 + 1}$, qui est du signe de $-6x^3$ donc C est

au-dessus de T pour $x \leq 0$ et C est au-dessous de T pour $x \geq 0$.

EXERCICE 4 : A. Pour tout réel $a \in [0 ; 1]$, on a : $a - a^2 = a(1 - a) \geq 0$; donc $a \geq a^2$; la fonction racine carrée étant croissante sur $[0 ; 1]$, on a donc $\sqrt{a} \geq a$.

B. a) La fonction g est continue sur $[0 ; 1]$ comme somme et composée de fonctions qui le sont ; on a $g(0) = 1 - 1 = 0$ et

$g(1) = 1$; la fonction g est dérivable sur $]0 ; 1]$ comme somme et composée de fonctions qui le sont, et $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$

> 0 sur $]0 ; 1]$; donc la fonction g est strictement croissante sur $]0 ; 1]$ et donc sur $[0 ; 1]$.

De plus, $g(x) - x = 1 - x - \sqrt{1-x} = a - \sqrt{a}$ avec $a = 1 - x \in [0 ; 1]$; d'après la partie A, $g(x) - x \leq 0$ donc $g(x) \leq x$; ainsi les quatre conditions sont vérifiées.

b) On sait que la fonction g est continue et strictement croissante de $[0 ; 1]$ dans $[0 ; 1]$, donc, pour tout $k \in [0 ; 1]$, l'équation $g(x) = k$ a une unique solution dans $[0 ; 1]$.

c) Lorsque $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$, on obtient $1 - \sqrt{1-x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, soit $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, et en passant au carré, $1 - x = 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{2}$,

soit $x = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$.

d) La fonction g n'est pas dérivable en 1 car $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\sqrt{1-x}}{x - 1} = +\infty$

e) Un polynôme du second degré P vérifiant les quatre conditions précédentes est $P(x) = x^2$.

Question subsidiaire : Oui, la fonction j définie par $j(x) = 1 - \cos(\frac{\pi x}{2})$ vérifie les quatre conditions.