

CORRIGÉ DEVOIR MAISON N° 1

EXERCICE 1 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

1. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$; On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ car $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1) = -\infty$;

On a $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = +\infty$ car $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} (x+1) = 0^+$; On a $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = -\infty$ car $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} (x+1) = 0^-$;

2. Pour étudier les variations de f , on détermine la fonction dérivée : cette fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Et $f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} < 0$, donc la fonction f est strictement décroissante sur $] -\infty ; -1[$ et sur $] -1 ; +\infty [$.

3. a) Une équation de la tangente T à la courbe C représentative de la fonction f au point A d'abscisse a différent de -1 est de la forme $y = f'(a)(x-a) + f(a) = \frac{-1}{(a+1)^2}(x-a) + \frac{1}{a+1} = \frac{-(x-a)+a+1}{(a+1)^2} = \frac{-x+2a+1}{(a+1)^2}$.

b) L'abscisse du point B intersection de T et de l'axe des abscisses vérifie les deux équations

$$y = 0 \text{ et } y = \frac{-x+2a+1}{(a+1)^2} ; \text{ soit } -x+2a+1 = 0, \text{ d'où } x = 2a+1.$$

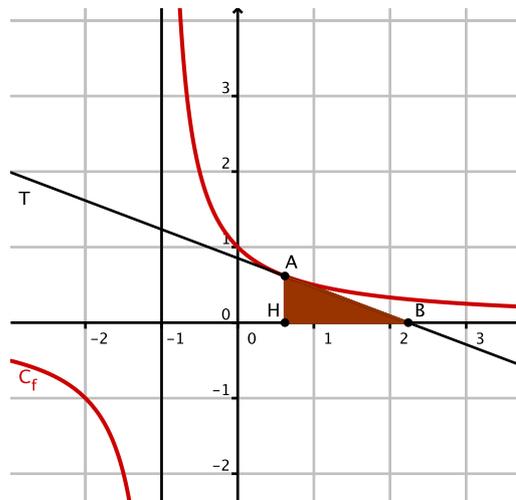
Donc $B(2a+1; 0)$.

c) Si H le projeté orthogonal de $A(a; f(a))$ sur l'axe des abscisses, alors $H(a; 0)$.

Le triangle AHB est rectangle en H , donc l'aire du triangle

$$AHB = \frac{HA \times HB}{2} = \frac{|f(a)| \times |2a+1-a|}{2} = \frac{|1/(a+1)| \times |a+1|}{2} = \frac{1}{2}.$$

Cette aire est invariante pour tout réel a de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.



EXERCICE 2 : On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} - x.$$

1. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$; on obtient une forme indéterminée. Pour lever cette

indétermination, on utilise la quantité conjuguée: on multiplie et on divise $f(x)$ par $\sqrt{x^2+1} + x$:

$$\text{on obtient } f(x) = \sqrt{x^2+1} - x = \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1}+x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$.

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

2. Pour étudier les variations de f , on détermine la fonction dérivée : cette fonction f est dérivable sur \mathbb{R} comme somme et composée de fonctions dérivables sur \mathbb{R} . Et $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$. Le signe de cette

dérivée dépend du signe du numérateur : $x - \sqrt{x^2+1}$. Or, pour tout réel x , $x^2 < x^2 + 1$, donc $\sqrt{x^2} < \sqrt{x^2+1}$ puisque la fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$. Donc $|x| < \sqrt{x^2+1}$, soit $x \leq |x| < \sqrt{x^2+1}$, soit $x - \sqrt{x^2+1} < 0$, et la fonction f est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

3. Le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$+\infty$	0

4. Pour montrer que la droite (d) d'équation $y = -2x$ est asymptote oblique à la courbe C , ici en $-\infty$, il faut montrer que la limite $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-2x)) = 0$.

$$\text{Or } f(x) + 2x = \sqrt{x^2+1} + x = \frac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}-x} =$$

$$\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}.$$

On a vu précédemment que $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x} = 0$, et la droite (d) d'équation $y = -2x$ est asymptote oblique à la courbe C en $-\infty$.

5. Une équation de la tangente T à la courbe C représentative de la fonction f au point d'abscisse 0 est donnée par $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = -x + 1$.

6. a) Les polynômes P du second degré dont la courbe représentative admet la droite T comme tangente au point d'abscisse 0 vérifient $P(0) = f(0) = 1$ et $P'(0) = f'(0) = -1$.

Un polynôme du second degré est de la forme $ax^2 + bx + c$. Donc $P(0) = c = 1$ et $P'(x) = 2ax + b$, soit $P'(0) = b = -1$. Donc $P(x) = ax^2 - x + 1$.

b) Parmi ces polynômes, l'un passe par le point A de coordonnées (2; 1) si $P(2) = 1$,

soit $P(x) = 4a - 2 + 1 = 4a - 1 = 1$, soit $a = \frac{1}{2}$.

7. Représentation graphique de la courbe C, la tangente T, la droite (d), le polynôme de la question 6. b).

