CORRECTION DEVOIR SURVEILLE N° 2

EXERCICE 1

a) On a $s_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = \dfrac{3(u_n + v_n) + 2}{4}$ et $s_0 = u_0 + v_0 = 2$; montrons alors , pour tout entier n, la propriété (P_n) : $s_n = 2$: (P_0) est vraie ; supposons (P_n) vraie et montrons que (P_{n+1}) est vraie :
$s_{n+1} = \dfrac{3(u_n + v_n) + 2}{4} = \dfrac{3\times 2 + 2}{4} = 2$; donc pour tout entier n, $s_n = 2$ et (s_n) est constante .

b) On a $d_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{3}{4} d_n$. Donc la suite (d_n) est une suite géometrique de raison $\dfrac{3}{4}$ et de premier terme $d_0 = v_0 - u_0 = 2$. c) D'où $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} d_n = 0$ car la raison est strictement comprise entre -1 et 1.

d) On obtient $s_n - d_n = 2u_n$, d'où $u_n = \dfrac{1}{2}\left(2 - 2\left(\dfrac{3}{4}\right)^n\right)$; $s_n + d_n = 2v_n$ d'où $v_n = \dfrac{1}{2}\left(2 + 2\left(\dfrac{3}{4}\right)^n\right)$.

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$. Les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

Question subsidiaire : Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes : il reste à montrer que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante : On a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-u_n + 1}{4}$; il suffit de montrer par récurrence que, pour tout entier n, $u_n < 1$; on a $v_{n+1} - v_n = \dfrac{-v_n + 1}{4}$; il suffit de montrer par récurrence que, pour tout entier n, $v_n > 1$ ...

EXERCICE 2

a) P(4) = 0 ; donc le polynôme P se factorise par (x - 4) et on trouve P(x) = $(x-4)(x^2 - 2x + 4)$.

b) On résout l'équation P(x) = 0 dans $\mathbb{C}$: considérons l'équation $x^2 - 2x + 4$: Δ = -12 < 0 donc il y a deux solutions complexes : $z_1 = \dfrac{2 + 2i\sqrt{3}}{2} = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = \dfrac{2 - 2i\sqrt{3}}{2} = 1 - i\sqrt{3}$. Les trois solutions sont { 4 ; z_1 ; z_2 }.

c) $|z_A| = |1 + i\sqrt{3}| = 2$, $|z_B| = |1 - i\sqrt{3}| = 2$; notons $\theta_A = Arg(z_A)$; on a $cos(\theta_A) = \dfrac{1}{2}$ et $sin(\theta_A) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ donc $Arg(z_A) = \dfrac{\pi}{3}$ [2π] ; notons $\theta_B = Arg(z_B)$; on a $z_B = \overline{z_A}$ donc $Arg(z_B) = -\dfrac{\pi}{3}$ [2π] .

e) Le triangle ABC est équilatéral, car AB = AC = BC = $2\sqrt{3}$.

EXERCICE 3

a) On a $g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$. Les racines de g' sont 1 et -1 ; $g'(x)$ est positif sur] -∞ ; -1]∪[1 ; +∞[et négatif sur [-1 ; 1] . Donc g est croissante sur] -∞ ; -1] , décroissante sur [-1 ; 1] et croissante sur [1 ; +∞[.

b) D'après la question précédente, $g(x)$ est strictement négatif sur] -∞ ; 1] ; de plus, la fonction g est continue et strictement croissante de]1 ; +∞[dans] -6 ; +∞[; or le nombre 0 ∈] -6 ; +∞[, il a donc un unique antécédent α dans]1 ; +∞[. L'équation $g(x) = 0$ admet donc une solution unique α sur $\mathbb{R}$. On sait que α > 1 ;
de plus $g(2) = -2$ et $g(3) = 14$ donc $2 < \alpha < 3$ et on trouve α = 2,19 à 10^{-2} près.

c) Le signe de $g(x)$: sur] -∞ ; α [, $g(x) < 0$ et sur] α ; +∞ [, $g(x) > 0$. Et $g(\alpha) = 0$.

d) On a $f'(x) = \dfrac{x^4 - 3x^2 - 4x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x\times g(x)}{(x^2-1)^2}$. Sur l'intervalle]1 ; +∞ [, $f'(x)$ est bien du signe de $g(x)$.

f) On a $\lim\limits_{x\to1^+}(x^3 + 2x^2) = 3$ et $\lim\limits_{x\to1^+}(x^2 - 1) = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = +\infty$. D'où le tableau de variations de f :

x	1		α		+∞
$f'(x)$	||	−	0	+	
$f(x)$	|| +∞	↘	$f(\alpha)$	↗	+∞

Une valeur approchée de $f(\alpha)$ = 5,294 .

g) La droite (d) d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique à la courbe C_f en +∞ si $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - (x+2)) = 0$; on a $f(x) - (x+2) = \dfrac{x+2}{x^2-1}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+2}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2} = 0$. Donc
La droite (d) est asymptote oblique à C_f en +∞ .

h) Equation de la tangente à C_f au point d'abscisse 2 : $y = f'(2)(x-2) + f(2) = \dfrac{-4}{9}x + \dfrac{56}{9}$.