CORRECTION DEVOIR SURVEILLE N° 1

EXERCICE 1 : **Partie A :** 1. Pour tout réel x, $x^2 + 1$ est strictement positif, donc $\sqrt{x^2+1}$ est définie sur ℝ et donc l'ensemble de définition de la fonction f est $D_f = \mathbb{R}$.

2. D_f est symétrique par rapport à 0. De plus, pour tout réel x, $f(-x) = \sqrt{(-x)^2+1} - 1 = \sqrt{x^2+1} - 1 = f(x)$. Donc la fonction f est paire.

3. Comme f est paire, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+1) = +\infty$ et que $\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$, donc en utilisant les limites de fonctions composées, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

4. a) Pour montrer que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à la courbe C , on étudie la limite:

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x)-(x-1)) = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+1}-x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+1}+x) = +\infty$. Donc la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à C en $+\infty$.

b) Par symétrie, la droite d'équation $y = -x - 1$ est asymptote oblique à C en $-\infty$.

5. La fonction f est dérivable sur ℝ comme composée de fonctions dérivables sur ℝ.

La dérivée de $\sqrt{u}$ est $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$. D'où la dérivée de f est $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ qui est du signe de x . La fonction f est donc décroissante dur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$.

6. Le tableau de variations de f sur D_f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

7. L'équation de la tangente à C au point d'abscisse 1 est

$y = f'(1)(x-1) + f(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-1) + \sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$.

8. L'équation $f(x) = 0$ équivaut à $\sqrt{x^2+1} = 1$, soit $x^2 + 1 = 1$, soit $x^2 = 0$. La seule solution est 0.

Partie B : 1. Pour montrer que la fonction g est continue en 0, on étudie $\lim\limits_{x\to0} g(x) = \lim\limits_{x\to0} \frac{f(x)}{x}$.

Or $\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$, on trouve une forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

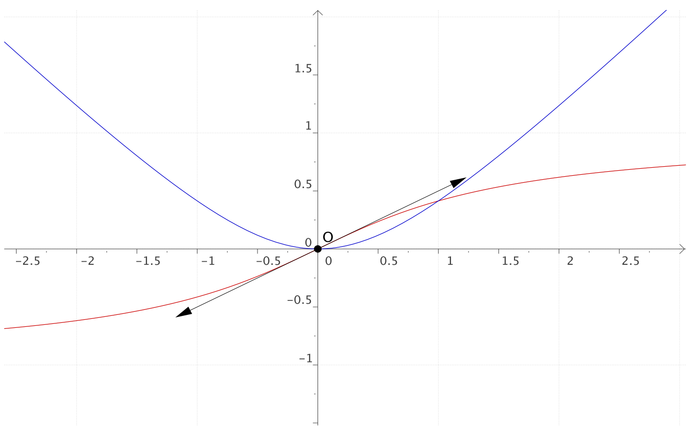
Pour x non nul, $\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = \frac{x^2+1-1}{x(\sqrt{x^2+1}+1)} = \frac{x^2}{x(\sqrt{x^2+1}+1)} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}$. $\lim\limits_{x\to0} (\sqrt{x^2+1}+1) = 2$, donc $\lim\limits_{x\to0} g(x) = 0 = g(0)$ donc la fonction g est continue en 0.

2. Pour étudier la dérivabilité de g en 0, on détermine $\lim\limits_{x\to0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0} \frac{f(x)}{x^2}$.

Pour x non nul, $\frac{f(x)}{x^2} = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} = \frac{x^2+1-1}{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1}$. Donc $\lim\limits_{x\to0} \frac{f(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$; ainsi la fonction g est dérivable en 0.

3. Ce dernier résultat indique que, au point d'abscisse 0 la courbe admet une tangente de coefficient directeur égal à $\frac{1}{2}$.

Ci-contre le tracé de f et de g.



EXERCICE 2 :

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$.

1. Les trois premiers termes de la suite (u_n) : $u_0 = 1$, $u_1 = -1$, $u_2 = -5$.

2. On pose $v_n = u_n - 3$.

3. $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = 2u_n - 3 - 3 = 2(u_n - 3) = 2v_n$. Donc la suite (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = u_0 - 3 = -2$ et de raison 2.

4. Donc pour tout entier naturel n, $v_n = -2 \times 2^n$, puis $u_n = v_n + 3 = 3 - 2 \times 2^n$.

5. La suite (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = -2$ et de raison 2, elle est donc strictement décroissante; soit pour tout entier naturel n, $v_{n+1} < v_n$. Donc $u_{n+1} - 3 < u_n - 3$, soit $u_{n+1} < u_n$. Ainsi la suite (u_n) est strictement décroissante.

6. On considère la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = u_n + 2n$.

Pour étudier les variations de (w_n), on étudie le signe de $w_{n+1} - w_n = u_{n+1} + 2(n+1) - (u_n + 2n) = u_{n+1} - u_n + 2 =$ $3 - 2 \times 2^{n+1} - (3 - 2 \times 2^n) + 2 = 2 - 2(2^{n+1} - 2^n) = 2 - 2^n(2-1) = 2 - 2^n = 2(1 - 2^{n-1})$.

Pour $n > 0$, $2^{n-1} \geqslant 1$, donc $1 - 2^{n-1} \leqslant 0$ et $w_{n+1} - w_n \leqslant 0$, d'où $w_{n+1} \leqslant w_n$. De plus $w_0 = u_0 = 1$ $w_1 = u_1 + 2 = 1$. Ainsi la suite (w_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.