

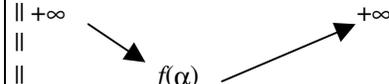
EXERCICE 1 : 1. a) Le polynôme P est dérivable sur \mathbb{P} et $P'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$ qui s'annule en -1 et en 1 . Donc P est strictement croissant sur $] -\infty ; -1]$ ainsi que sur $[1 ; +\infty [$, et est strictement décroissant sur $]-1 ; 1[$.
b) P est continu et strictement croissant de $] -\infty ; -1]$ dans $] -\infty ; -1]$, et $0 \notin] -\infty ; -1]$, donc l'équation $P(x) = 0$ n'a pas de solution dans $] -\infty ; -1]$. P est continu et strictement décroissant de $]-1 ; 1[$ dans $] -5 ; -1 [$, donc l'équation $P(x) = 0$ n'a pas de solution dans $]-1 ; 1[$. P est continu et strictement croissant de $] 1 ; +\infty [$ dans $] -5 ; +\infty [$, et $0 \in] -5 ; +\infty [$, donc l'équation $P(x) = 0$ a une unique solution α dans $] 1 ; +\infty [$. Donc l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution α sur \mathbb{J} . Un encadrement de α à $0,01$ près : $2,10 < \alpha < 2,11$.

2. a) La fonction f est une fonction rationnelle ; la limite de f en $+\infty$ est la limite du rapport des termes de plus haut degré : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x^2} = +\infty$; $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} x^2 - 1 = 0^+$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} 2x^3 + 3 = 5$, donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$.

b) La fonction f est une fonction rationnelle donc dérivable sur son ensemble de définition, ici sur I .

$f'(x) = \frac{6x^2(x^2-1) - (2x^3+3)2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2xP(x)}{(x^2-1)^2}$. Le signe de f' est celui de $P(x)$ sur I qui est positif sur $[\alpha ; +\infty [$ et négatif sur $] -\infty ; \alpha [$.

D'où le tableau de variations :

x	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$
			

EXERCICE 2 : a) Pour tout entier naturel n , on a

$$2 - \frac{5}{u_n + 4} = \frac{2(u_n + 4) - 5}{u_n + 4} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4} = u_n.$$

b) On considère la propriété (P_n) définie par : $0 \leq u_n \leq 2$.

Initialisation : (P_0) est vraie : $u_0 = 0$ et $0 \leq 0 < 2$;

Hérédité : supposons (P_n) vraie pour un certain entier n et montrons que (P_{n+1}) est vraie : $0 \leq u_{n+1} \leq 2$, d'où

$$4 \leq u_n + 4 \leq 6, \text{ d'où } \frac{-5}{4} \leq \frac{-5}{u_n + 4} \leq \frac{-5}{6}, \text{ d'où } 2 - \frac{5}{4} \leq 2 - \frac{5}{u_n + 4} \leq 2 - \frac{5}{6}, \text{ d'où } 0 < \frac{3}{4} \leq u_{n+1} \leq \frac{7}{6} < 2 ; \text{ donc } (P_{n+1}) \text{ est}$$

vraie ; ainsi, pour tout entier naturel n non nul, $0 \leq u_n \leq 2$.

c) On a $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 3} = \frac{\frac{2u_n + 3}{u_n + 4} - 1}{\frac{2u_n + 3}{u_n + 4} + 3} = \frac{2u_n + 3 - u_n - 4}{2u_n + 3 + 3u_n + 12} = \frac{u_n - 1}{5u_n + 15} = \frac{1}{5} v_n$, donc la suite (v_n) est une suite géométrique

de raison $1/5$ et de premier terme $v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 3} = \frac{-1}{3}$. e) Donc $v_n = \frac{-1}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{-1}{3 \times 5^n}$. La raison de la suite étant

strictement compris entre 0 et 1 , la limite de la suite (v_n) est 0 . f) On a $(u_n + 3)v_n = u_n - 1$, d'où $u_n(v_n - 1) = -3v_n - 1$,

d'où $u_n = \frac{-3v_n - 1}{v_n - 1} = \frac{\frac{1}{5^n} - 1}{\frac{-1}{3 \times 5^n} - 1}$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{5^n} = 0$, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$. La suite (u_n) converge vers 1 .

EXERCICE 3 : a) $u_1 = 1/2, u_2 = 2/3, u_3 = 3/4$. b) Les quatre premiers termes de (u_n) sont égaux à ceux de (w_n) .

c) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n, u_n = w_n$; l'initialisation a été faite à la question précédente.

Supposons que, pour un certain entier $n, u_n = w_n$, et montrons que $u_{n+1} = w_{n+1}$: $u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n} = \frac{1}{2 - \frac{n}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2} = w_{n+1}$;

donc pour tout entier naturel $n, u_n = w_n$.

d) $u_n = w_n = \frac{n}{n+1} = f(n)$ où la fonction est définie, dérivable (comme fonction rationnelle) sur $[0 ; +\infty [$ par $f(x) =$

$\frac{x}{x+1}$, de dérivée $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$; donc la fonction f est strictement croissante sur \mathbb{J} , et par suite (u_n) est

strictement croissante.

e) On a, pour tout entier naturel $n, 0 \leq n < n+1$, d'où $0 \leq \frac{n}{n+1} < 1$, donc la suite (u_n) est bornée par 0 et 1 .

f) $v_n = u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$. g) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.