

EXERCICE 1 (6 points)

1. On considère la fonction polynôme P définie pour tout réel x par : $P(x) = x^3 - 3x - 3$.

- Etudier les variations de P .
- Montrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$. Donner un encadrement de α à 0,01 près.
- En déduire le signe de P sur $\mathbb{R}$.

2. On considère la fonction f définie sur $I =]1 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x^3 + 3}{x^2 - 1}$.

- Déterminer les limites de f aux bornes de I .
- Montrer que la fonction f est dérivable et que le signe de $f'(x)$ est celui de $P(x)$ sur I . Etudier les variations de f sur I et dresser son tableau de variations.

EXERCICE 2 (7 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}$.

- Montrer que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 2 - \frac{5}{u_n + 4}$.
- Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $0 \leq u_n \leq 2$.
- On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n , par $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ dont on précisera le premier terme.
- Ecrire alors v_n en fonction de n . Déterminer la limite de la suite (v_n) .
- Ecrire u_n en fonction de n . Etudier la convergence de la suite (u_n) .

EXERCICE 3 (7 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}$.

- Calculer u_1, u_2, u_3 . On exprimera chacun de ces termes sous la forme d'une fraction irréductible.
- Comparer les quatre premiers termes de la suite (u_n) avec ceux de la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \frac{n}{n+1}$.
- Démontrer que pour tout entier naturel n , $u_n = w_n$.
- Montrer que la suite (u_n) est croissante.
- Montrer que la suite (u_n) est bornée par 0 et 1.
- Déterminer le produit $v_n = u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$ sous la forme d'une fraction dépendant de n .
- Déterminer la limite des suites (u_n) et (v_n) .