CORRECTION DEVOIR **BRAIN-PREPA (www.brainprepa.com)**

EXERCICE 1 :

1. a) La limite du numérateur est 0, ainsi que celle du dénominateur ; donc il s'agit bien d'une forme indéterminée.

b) Pour tout $x \neq 1$, on a $u(1) = v(1) = 0$ et :

$$\boxed{\dfrac{\dfrac{u(x)-u(1)}{x-1}}{\dfrac{v(x)-v(1)}{x-1}} = \dfrac{u(x)-u(1)}{x-1} \times \dfrac{x-1}{v(x)-v(1)} = \dfrac{u(x)}{v(x)}}$$

c) Les fonctions u et v sont des polynômes donc dérivables sur $\mathbb{R}$, donc $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{u(x)-u(1)}{x-1} = u'(1)$ et $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{v(x)-v(1)}{x-1} = v'(1)$. On a $u'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x$ et $u'(1) = 9$; $v'(x) = 5x^4 + 4x^3$ et $v'(1) = 9$.

d) Ainsi $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4 + x^3 + x^2 - 3}{x^5 + x^4 - 2} = \dfrac{u'(1)}{v'(1)} = 1$

e) La limite du numérateur est 0, ainsi que celle du dénominateur ; donc il s'agit bien d'une forme indéterminée. Posons $v(x) = x^3 + x$; les fonctions cosinus et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{cos(x)-1}{x} = cos'(0) = -sin(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{v(x)-v(0)}{x-0} = v'(0) = 1$ (car $v'(x) = 3x^2 + 1$) ; donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{cos(x)-1}{x^3 + x} = \dfrac{0}{1} = 0$.

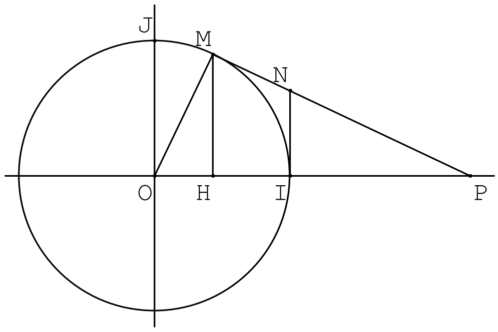
2. a) On obtient $\infty - \infty$, il s'agit bien d'une forme indéterminée.

b) Pour tout x réel, on a $\sqrt{x^2+1} - x = \dfrac{(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)}{\sqrt{x^2+1} + x} = \dfrac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2+1} + x} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}$; donc

$\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+1} - x = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = 0$.

c) On obtient $\dfrac{\infty}{\infty}$, il s'agit bien d'une forme indéterminée. Pour tout x de $]-1 ; +\infty[$, on a $\sqrt{4+x} - 2 = \dfrac{x}{\sqrt{4+x} + 2}$ et $\sqrt{1+x} - 1 = \dfrac{x}{\sqrt{1+x} + 1}$; donc pour tout x de $]-1 ; +\infty[$, $\dfrac{\sqrt{4+x} - 2}{\sqrt{1+x} - 1} = \dfrac{\sqrt{1+x} + 1}{\sqrt{4+x} + 2}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{4+x} - 2}{\sqrt{1+x} - 1} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

EXERCICE 2 : a) Puisque M est sur le quart de cercle situé strictement entre I et J, $x \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $cos x$ et $sin x$ sont strictement compris entre 0 et 1. Le triangle OMP est rectangle en M, donc $cos\, x = \dfrac{\text{OM}}{\text{OP}} = \dfrac{1}{\text{OP}}$; le triangle OMH est rectangle en H, donc $sin\, x = \dfrac{\text{HM}}{\text{OM}} = \text{HM}$ et $cos\, x = \text{OH}$; de plus, HP = OP− OH . Ainsi



l'aire de HMP = $S_1(x) = \dfrac{\text{HP}\times\text{HM}}{2} = \dfrac{(\dfrac{1}{cos\, x} - cos\, x) sin\, x}{2} = \dfrac{sin^3 x}{2 cos\, x}$.

b) On a IP = OP − 1 ; l'angle $\widehat{\text{IPN}} = \dfrac{\pi}{2} - x$; dans le triangle NIP rectangle en I, on a $tan(\dfrac{\pi}{2} - x) = \dfrac{\text{IN}}{\text{IP}}$, donc

$\text{IN} = tan(\dfrac{\pi}{2} - x)\text{IP} = \dfrac{cos\, x}{sin\, x} \times (\dfrac{1}{cos\, x} - 1) = \dfrac{1 - cos\, x}{sin\, x}$. L'aire du triangle NIP = $S_2(x) = \dfrac{\text{IP}\times\text{NI}}{2} = \dfrac{(1 - cos\, x)^2}{2 cos\, x\, sin\, x}$.

c) Le rapport des aires $\dfrac{S_1(x)}{S_2(x)} = \dfrac{sin^3 x}{2 cos\, x} \times \dfrac{2 cos\, x\, sin\, x}{(1 - cos\, x)^2} = \dfrac{sin^4 x}{(1 - cos\, x)^2} = \left(\dfrac{sin^2 x}{1 - cos\, x}\right)^2 = (1 + cos\, x)^2$. Donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{S_1(x)}{S_2(x)} = 4$

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{S_1(x)}{S_2(x)} = 1$. En fait, la fonction quotient des deux aires est décroissante de $\left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$ dans $]\,4 ; 1\,[$.