DEVOIR A FAIRE **BRAIN-PREPA (www.brainprepa.com)**

EXERCICE 1 : Le but de cet exercice est de calculer quelques limites de fonctions :

1. On veut calculer $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+x^3+x^2-3}{x^5+x^4-2}$; a) montrer qu'il s'agit d'une forme indéterminée.

b) on pose $u(x)=x^4+x^3+x^2-3$ et $v(x)=x^5+x^4-2$; vérifier que pour tout $x\neq 1$, on a $\dfrac{u(x)}{v(x)}=\dfrac{\dfrac{u(x)-u(1)}{x-1}}{\dfrac{v(x)-v(1)}{x-1}}$

c) Que représente $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{u(x)-u(1)}{x-1}$ et $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{v(x)-v(1)}{x-1}$? Déterminer alors ces limites.

d) En déduire la limite cherchée.

e) Utiliser la même méthode pour déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{cos(x)-1}{x^3+x}$.

2. On veut calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x$; a) montrer qu'il s'agit d'une forme indéterminée.

b) Montrer que, pour tout x réel, on a $\sqrt{x^2+1}-x=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$; en déduire la limite cherchée.

c) Utiliser la même méthode pour déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{\sqrt{1+x}-1}$.

EXERCICE 2 : On considère le repère orthonormé (O ; I, J) et le cercle trigonométrique. Pour tout point M du quart de cercle situé strictement entre I et J, la tangente au cercle en M coupe (OI) en P ; la tangente au cercle en I coupe (MP) en N. Le point H est le projeté orthogonal de M sur (OI). On pose $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})=x$. Faire une figure.

a) Déterminer l'aire $S_1(x)$ du triangle HMP en fonction de x

b) Déterminer l'aire $S_2(x)$ du triangle NIP en fonction de x.

c) Etudier la limite éventuelle du rapport des aires $\dfrac{S_1(x)}{S_2(x)}$ lorsque x tend vers 0, puis lorsque x tend vers $\dfrac{\pi}{2}$.