CORRIGÉ DEVOIR MAISON N° 4

EXERCICE 1 : A. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$.

1. On trouve $u_1 = 1$, $u_2 = \frac{5}{4}$, $u_3 = \frac{5}{4} + \frac{1}{9} = \frac{49}{36}$, $u_4 = \frac{49}{36} + \frac{1}{16} = \frac{205}{144}$.

2. Pour tout entier naturel $n > 0$, $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$, donc la suite (u_n) est croissante.

3. Pour tout entier $k \geqslant 2$, $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k-(k-1)}{k(k-1)} = \frac{1}{k(k-1)} > \frac{1}{k^2}$, car $k(k-1) < k^2$, donc $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

En sommant ces inégalités membre à membre pour $2 \leqslant k \leqslant n$, on trouve :

$\sum_{k=2}^{k=n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$.

Donc, pour tout entier $n > 0$, $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{k=n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2$; ainsi la suite (u_n) est majorée par 2.

4. La suite (u_n) es croissante et majorée par 2, donc elle converge vers un réel $l < 2$.

Euler a démontré en 1748 que cette suite converge vers $\frac{\pi^2}{6}$.

B. On considère les suites (v_n) et (w_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = u_n + \frac{1}{n+1}$ et $w_n = u_n + \frac{1}{n}$.

1. On a $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\pi^2}{6}$ car $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

De même, $\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\pi^2}{6}$ car $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

2. a) Pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{n+2} - (u_n + \frac{1}{n+1}) = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} =$

$\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+2+(n+1)^2-(n+2)(n+1)}{(n+1)^2(n+2)} = \frac{1}{(n+1)^2(n+2)}$.

b) Comme $n > 0$, alors $(n+1)^2(n+2) > 0$ et $v_{n+1} - v_n > 0$, donc la suite (v_n) est strictement croissante.

3. Pour tout entier $n \geqslant 1$, $w_{n+1} - w_n = u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - (u_n + \frac{1}{n}) = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} =$

$\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n+n(n+1)-(n+1)^2}{n(n+1)^2} = \frac{-1}{n(n+1)^2} < 0$, donc $w_{n+1} - w_n < 0$; ainsi la suite (w_n) est strictement décroissante. De plus, $w_n - v_n = u_n + \frac{1}{n} - (u_n + \frac{1}{n+1}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$ et $\lim_{n\to+\infty} (w_n - v_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0$. On a donc (v_n) est strictement croissante, (w_n) est strictement décroissante et $\lim_{n\to+\infty} (w_n - v_n) = 0$, donc les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes.

4. Les suites sont adjacentes, donc elles convergent vers la même limite $\frac{\pi^2}{6}$ et $v_n \leqslant \frac{\pi^2}{6} \leqslant w_n$.

5. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $w_n - v_n = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}$ car $n(n+1) > n^2$ et $\frac{1}{n(n+1)} > 0$,

donc $0 \leqslant w_n - v_n \leqslant \frac{1}{n^2}$.

6. L'encadrement $v_n \leqslant \frac{\pi^2}{6} \leqslant w_n$ est inférieur à 10^{-2} si $w_n - v_n \leqslant 10^{-2}$, soit $\frac{1}{n(n+1)} \leqslant 10^{-2}$, soit $n(n+1) \geqslant 10^2$, soit $n^2 + n \geqslant 100$; on résout l'équation $n^2 + n - 100 = 0$; le discriminant $\Delta = 401 > 0$; il y a deux solutions réelles $n_1 = \frac{-1-\sqrt{401}}{2}$ et $n_2 = \frac{-1+\sqrt{401}}{2}$.

La solution est l'ensemble $]-\infty; \frac{-1-\sqrt{401}}{2}] \; [\frac{-1+\sqrt{401}}{2}; +\infty[$. On cherche le plus petit entier naturel dans cet ensemble, il s'agit de 10 car $\frac{-1+\sqrt{401}}{2} \simeq 9,5$.

EXERCICE 2 : On considère la fonction f définie sur $]\frac{-\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = \tan x$.

1. L'ensemble de définition $]\frac{-\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$ de la fonction f est centré en 0;

et pour tout x dans $]\frac{-\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$, $f(-x) = \tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$ car la fonction sinus est impaire et la fonction cosinus est paire. Donc la fonction f est impaire.

2. On en déduit que la courbe représentative de f admet le point O, origine du repère comme centre de symétrie.

3. Pour déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 2x$, on étudie la fonction $g(x) = f(x) - 2x$. En effet, l'équation $f(x) = 2x$ est équivalente à l'équation $g(x) = 0$.

La fonction g est dérivable sur $]\frac{-\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$ comme somme de fonctions qui le sont.

Et $g'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} - 2 = \frac{1-2\cos^2(x)}{\cos^2(x)}$. Cette dérivée est du signe du numérateur qui s'annule pour $\cos^2(x) = \frac{1}{2}$, soit $\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, ce qui donne $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = -\frac{\pi}{4}$.

Le signe de $g'(x)$ est, comme pour l'expression $X^2 - \frac{1}{2}$, du signe de 1, donc positif pour les valeurs extérieures au racines et négatif pour les valeurs entre les racines.

D'où le tableau de variations :

x	$\frac{-\pi}{2}$		$\frac{-\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$		+	0	−	0	+	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$-1+\frac{\pi}{2}$	↘	$1-\frac{\pi}{2}$	↗	$+\infty$

4.

Sur l'intervalle $]\frac{-\pi}{2} ; \frac{-\pi}{4}]$, la fonction g est continue car elle est dérivable, et g est strictement croissante de $]\frac{-\pi}{2} ; \frac{-\pi}{4}]$ dans $]-\infty; -1+\frac{\pi}{2}]$; or $-1+\frac{\pi}{2} > 0$, donc $0 \in]-\infty; -1+\frac{\pi}{2}]$, donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]\frac{-\pi}{2} ; \frac{-\pi}{4}]$.

Sur l'intervalle $]\frac{-\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}]$, la fonction g est continue et est strictement croissante de $]\frac{-\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}]$ dans $]-1+\frac{\pi}{2} ; 1-\frac{\pi}{2}]$; or $-1+\frac{\pi}{2} > 0$ et $1-\frac{\pi}{2} < 0$, donc $0 \in]-1+\frac{\pi}{2} ; 1-\frac{\pi}{2}]$, et l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution β sur $]\frac{-\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}]$.

Sur l'intervalle $]\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}[$, la fonction g est continue et est strictement croissante de $]\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}[$ dans $]1-\frac{\pi}{2} ; +\infty[$; or $1-\frac{\pi}{2} < 0$, donc $0 \in]1-\frac{\pi}{2} ; +\infty[$, et l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution γ sur $]\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}[$.

Il y a donc trois solutions à l'équation $\tan x = 2x$, $\alpha \in]\frac{-\pi}{2} ; \frac{-\pi}{4}]$, $\beta \in]\frac{-\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}]$ et $\gamma \in]\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}[$.

De plus, on sait que $g(x) = 0$, donc $\beta = 0$.

A l'aide de la calculatrice, on trouve des valeurs approchées à 10^{-3} près de α et γ :

$\alpha = -1{,}166$ et $\gamma = 1{,}166$.