CORRIGÉ DEVOIR SURVEILLÉ N° 1

EXERCICE 1 :

1. On utilise la propriété : la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ d'une fonction rationnelle est la limite du quotient des termes de plus haut degré. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2-6}{x-2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$.

Et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^2-6}{x-2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x = -\infty$.

On a $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} (2x^2-6) = 2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} (x-2) = 0^+$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} \frac{2x^2-6}{x-2} = +\infty$ par quotient de limites.

On a $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} (2x^2-6) = 2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} (x-2) = 0^-$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} \frac{2x^2-6}{x-2} = -\infty$ par quotient de limites.

2. Pour étudier les variations de la fonction f, on détermine la fonction dérivée de f :

$f'(x) = \frac{4x(x-2)-(2x^2-6)\times1}{(x-2)^2} = \frac{2x^2-8x+6}{(x-2)^2}$.

Le dénominateur est strictement positif, donc le signe de $f'(x)$ est le signe du numérateur: on calcule le discriminant : $\Delta = 8^2 - 4\times2\times6 = 16 > 0$. Il y a deux racines $x_1 = \frac{8-\sqrt{16}}{2\times2} = 1$ et $x_2 = \frac{8+\sqrt{16}}{2\times2} = 3$. Ce numérateur est du signe de $a = 2 > 0$ pour les valeurs extérieures aux racines.

3. Le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	$-\infty$ $\|$ $+\infty$	↘	12	↗	$+\infty$

4. a) On a $ax + b + \frac{c}{x-2} = \frac{(ax+b)(x-2)+c}{x-2} = \frac{ax^2+(b-2a)x-2b+c}{x-2} = \frac{2x^2-6}{x-2}$. Par identification, on trouve $a = 1$, $b - 2a = 0$ et $-2b + c = -6$; et on trouve $a = 2$, $b = 4$ et $c = 2$.

Donc, pour tout réel x de $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, $f(x) = 2x + 4 + \frac{2}{x-2}$.

b) Pour montrer que la droite (d) d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe C en $+\infty$, on montre que $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-(ax+b)) = 0$: On a $f(x) - (2x + 4) = \frac{2}{x-2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x-2} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-(2x+4)) = 0$. On montre de même que la droite est asymptote oblique à la courbe C en $-\infty$.

5. Une équation de la tangente T à la courbe C représentative de la fonction f au point d'abscisse 0 est donnée par $y = f'(0)(x-0) + f(0) = \frac{3}{2}x + 3$.

6. Pour déterminer les coordonnées des points d'intersection de C avec l'axe des abscisses, on résout l'équation : $f(x) = 0$, soit $2x^2 - 6 = 0$ équivaut à $2(x^2 - 3) = 0$ équivaut à $x^2 - 3 = 0$ équivaut à $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$.

Donc les coordonnées des points d'intersection de C avec l'axe des abscisses sont ($\sqrt{3}$; 0) et ($-\sqrt{3}$; 0).

EXERCICE 2 : 1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$.

Pour montrer que la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe C représentative de la fonction f en $+\infty$, on détermine $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-2x)$. On a $f(x) - 2x = \sqrt{x^2+1} - x = \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+1}+x) = +\infty$ par somme de limites, et $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-2x) = 0$.

Donc, la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe C représentative de la fonction f en $+\infty$.

De plus , $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)-2x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+1}-x) = +\infty$, donc la droite d'équation $y = 2x$ n'est pas asymptote à C en $-\infty$.

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = 1$ (il suffit de calculer $f(0)$).

Pour tout réel x de $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \dfrac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$.

Ainsi $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \dfrac{1}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \dfrac{1}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{1}{2}$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}+1} = 0$.

<u>EXERCICE 3</u> : 1. En remplaçant n par 0, on obtient $u_1 = \dfrac{u_0 + \frac{1}{0+1}}{2-u_0} = \dfrac{1}{2}$;

en remplaçant n par 1, on obtient $u_2 = \dfrac{u_1 + \frac{1}{1+1}}{2-u_1} = \dfrac{2}{3}$; puis $u_3 = \dfrac{3}{4}$, $u_4 = \dfrac{4}{5}$.

2. On conjecture que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

3. On démontre cette conjecture en utilisant un raisonnement par récurrence:

Initialisation : $u_0 = 0 = \dfrac{0}{1}$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : On suppose que pour un entier naturel n, $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ et on démontre que $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+2}$:

$$u_{n+1} = \dfrac{u_n + \frac{1}{n+1}}{2-u_n} = \dfrac{\frac{n}{n+1} + \frac{1}{n+1}}{2 - \frac{n}{n+1}} = \dfrac{\frac{n+1}{n+1}}{\frac{2(n+1)-n}{n+1}} = \dfrac{1}{\frac{n+2}{n+1}} = \dfrac{n+1}{n+2}.$$ CQFD.

Conclusion : pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

<u>EXERCICE 4 :</u> On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1}$.

1. On a $u_1 = \sqrt{2u_0-1} = \sqrt{2\times 5-1} = \sqrt{9} = 3$; $u_2 = \sqrt{2u_1-1} = \sqrt{2\times 3-1} = \sqrt{5}$.

2. On démontre par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $1 \leqslant u_n \leqslant 3$:

Initialisation : $u_1 = 3$, donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

Hérédité : On suppose que pour un entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant 3$ et on démontre que $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$:

$1 \leqslant u_n \leqslant 3$; on multiplie chaque membre par 2 : $2 \leqslant 2u_n \leqslant 6$; on soustrait 1 à chaque membre :

$1 \leqslant 2u_n - 1 \leqslant 5$; on prend la racine carrée de chaque membre positif (la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$) : $1 \leqslant \sqrt{2u_n-1} \leqslant \sqrt{5}$;or $\sqrt{5} < 3$, donc $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$. CQFD.

Conclusion : pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant 3$. Donc la suite (u_n) est bornée par 1 et 3.

3. On démontre par récurrence que la suite (u_n) est strictement décroissante : La propriété (P_n) est $u_{n+1} < u_n$.

Initialisation : $u_0 = 5$ et $u_1 = 3$, donc la propriété (P_n) est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : On suppose que pour un entier naturel n, $u_{n+1} < u_n$ et on démontre que $u_{n+2} < u_{n+1}$:

on part de l'inégalité : $u_{n+1} < u_n$; on multiplie chaque membre par 2 : $2u_{n+1} < 2u_n$;

on soustrait 1 à chaque membre : $2u_{n+1} - 1 < 2u_n - 1$; on prend la racine carrée de chaque membre positif (la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$) : $\sqrt{2u_{n+1}-1} < \sqrt{2u_n-1}$; donc $u_{n+2} < u_{n+1}$. CQFD.

Conclusion : la suite (u_n) est strictement décroissante .

Comme elle est minorée et strictement décroissante, on peut en conclure qu'elle converge.