

DEVOIR SURVEILLÉ N° 1

EXERCICE 1 (7 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \frac{2x^2-6}{x-2}$.

1. Déterminer les limites de la fonction aux bornes de son ensemble de définition.
2. Etudier les variations de la fonction f .
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f .
4. a) Déterminer des réels a , b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$.
b) Montrer que la droite (d) d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe C.
5. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C représentative de la fonction f au point d'abscisse 0.
6. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de C avec l'axe des abscisses.

EXERCICE 2 (4 points)

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$.

Montrer que la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe C représentative de la fonction f .

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.

Déterminer les limites de la fonction aux bornes de son ensemble de définition.

EXERCICE 3 (5 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{u_n + \frac{1}{n+1}}{2-u_n}$.

1. Calculer, sous forme de fractions irréductibles, u_1 , u_2 , u_3 , u_4 .
2. Conjecturer l'écriture de u_n en fonction de n .
3. Démontrer cette conjecture en utilisant un raisonnement par récurrence.

EXERCICE 4 (4 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n-1}$.

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 , u_2 .
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $1 \leq u_n \leq 3$.
3. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est strictement décroissante.