

CORRECTION

EXERCICE 1 : 1. l'ensemble de définition D_f de la fonction f est l'ensemble des réels x tels que $x^2 - 1 \geq 0$.

Soit $x^2 \geq 1$, soit $x \in]-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty[$. Donc $D_f =]-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty[$.

2. a) Pour tout réel x de D_f , $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - x = \frac{(x^2 - 1) - x^2}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} + x}$ en utilisant l'identité remarquable

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b). \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

c) Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, la courbe C_f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ (axe des abscisses) en $+\infty$.

3. Pour montrer que la droite d'équation $y = -2x$ est asymptote oblique à C_f , on étudie $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-2x)) =$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 1} + x). \text{ On peut écrire } \sqrt{x^2 - 1} + x = \frac{(x^2 - 1) - x^2}{\sqrt{x^2 - 1} - x} = \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} - x} = \frac{-1}{f(x)} \text{ et comme } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty,$$

alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-2x)) = 0$. Donc la droite d'équation $y = -2x$ est asymptote oblique à la courbe C_f en $-\infty$.

4. Étude de la dérivabilité de f en -1 et en 1 :

a) Pour $x < -1$: $x - 1 < 0$, d'où $-x + 1 > 0$ et $-x - 1 > 0$. Ainsi $\frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \frac{\sqrt{x^2 - 1} - x - 1}{x + 1} = \frac{\sqrt{(x-1)(x+1)}}{\sqrt{(x+1)^2}} - 1 =$

$$\frac{\sqrt{(-x+1)(-x-1)}}{\sqrt{(-x-1)^2}} - 1 = \sqrt{\frac{-x+1}{-x-1}} - 1 = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - 1. \text{ D'où } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - 1 \right) = +\infty, \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x-1) = -2 \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} (x+1) = 0^- \text{ et } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{x+1} = +\infty. \text{ La fonction } f \text{ n'est pas dérivable en } -1.$$

b) Pour $x > 1$: $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\sqrt{x^2 - 1} - x + 1}{x - 1} = \frac{\sqrt{(x-1)(x+1)}}{\sqrt{(x-1)^2}} - 1 = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1.$

D'où $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1 \right) = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-1} = +\infty$. La fonction f n'est pas dérivable en 1 .

5. a) La fonction f est dérivable sur $]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$ comme somme et composée de fonctions qui le sont.

D'où $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} - 1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}}$. Le signe de $f'(x)$ est le signe du numérateur:

Si $x < -1$, x et $-\sqrt{x^2 - 1}$ sont négatifs, donc $f'(x) \leq 0$.

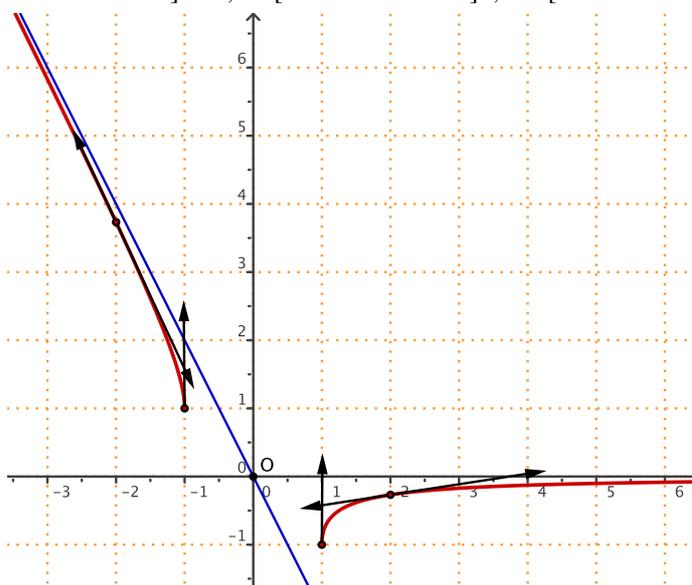
Si $x > 1$, on a $0 \leq x^2 - 1 \leq x^2$, donc $\sqrt{x^2 - 1} \leq x$ par la croissance de la fonction racine carrée sur $[0 ; +\infty[$;

et $x - \sqrt{x^2 - 1} \geq 0$, donc $f'(x) \geq 0$. La fonction f est décroissante sur $]-\infty ; -1[$ et croissante sur $]1 ; +\infty[$.

b) Le tableau de variations de f sur D_f :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	\parallel	Non définie	$+$
$f(x)$	$+\infty$	\searrow	Non définie	0
		1	\nearrow	
			-1	

6. La courbe ainsi que les tangentes aux points d'abscisses $-2, -1, 1$ et 2 :



EXERCICE 2

1. a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , $1 < u_n < 3$: On peut écrire $u_{n+1} = \frac{5u_n - 3}{u_n + 1} = 5 - \frac{8}{u_n + 1}$.

Initialisation : $u_0 = 2$ donc $1 < u_0 < 3$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité: Supposons que, pour un entier naturel k , $1 < u_k < 3$, et montrons que $1 < u_{k+1} < 3$:

$$1 < u_k < 3 \text{ entraîne } 2 < u_k + 1 < 4, \text{ puis } \frac{1}{4} < \frac{1}{u_k + 1} < \frac{1}{2}, \text{ puis } -4 < \frac{-8}{u_k + 1} < -2, \text{ puis } 1 < 5 - \frac{8}{u_k + 1} < 3;$$

ainsi $1 < u_{k+1} < 3$. Donc, pour tout entier naturel n , $1 < u_n < 3$.

b) Montrons par récurrence que la suite (u_n) est croissante, c'est-à-dire que, pour tout entier n , $u_{n+1} > u_n$:

Initialisation : $u_0 = 2$ et $u_1 = \frac{7}{3}$ donc $u_1 > u_0$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité: Supposons que, pour un entier naturel k , $u_{k+1} > u_k$, et montrons que $u_{k+2} > u_{k+1}$:

$$u_{k+1} > u_k \text{ entraîne } u_{k+1} + 1 > u_k + 1, \text{ puis } \frac{1}{u_{k+1} + 1} < \frac{1}{u_k + 1}, \text{ puis } \frac{-8}{u_{k+1} + 1} > \frac{-8}{u_k + 1}, \text{ puis } 5 + \frac{-8}{u_{k+1} + 1} > 5 + \frac{-8}{u_k + 1};$$

ainsi $u_{k+2} > u_{k+1}$. Donc la suite (u_n) est croissante.

c) Comme la suite (u_n) est croissante et majorée par 3, elle est convergente.

$$3. a) v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1} - 1} = \frac{\frac{5u_n - 3}{u_n + 1} - 3}{\frac{5u_n - 3}{u_n + 1} - 1} = \frac{\frac{5u_n - 3 - 3(u_n + 1)}{u_n + 1}}{\frac{5u_n - 3 - (u_n + 1)}{u_n + 1}} = \frac{2u_n - 6}{4u_n - 4} = \frac{2(u_n - 3)}{4(u_n - 1)} = \frac{1}{2} v_n. \text{ Ainsi, la suite } (v_n) \text{ est}$$

géométrique de premier terme $v_0 = \frac{u_0 - 3}{u_0 - 1} = -1$ et de raison $\frac{1}{2}$.

b) Donc $v_n = -1 \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - (0,5)^n$. De $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n - 1}$, on déduit que $v_n(u_n - 1) = u_n - 3$, puis $u_n(v_n - 1) = v_n - 3$ et

$$u_n = \frac{v_n - 3}{v_n - 1}, \text{ donc } u_n = \frac{-(0,5)^n - 3}{-(0,5)^n - 1}.$$

2. La raison de la suite (v_n) étant strictement comprise entre 0 et 1, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$.