CORRIGÉ

EXERCICE 1 : On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{4x^2+1}-2$ et C la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan .

1. L'ensemble de définition de la fonction f est l'ensemble des réels x tels que $4x^2 + 1$ est positif, ce qui est toujours vrai, donc $D_f = \mathbb{R}$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} (4x^2+1) = \lim\limits_{x\to+\infty} 4x^2 = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$, donc par composée de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
$\lim\limits_{x\to-\infty} (4x^2+1) = \lim\limits_{x\to-\infty} 4x^2 = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$, donc par composée de limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

3. Étude de la parité de la fonction f : l'ensemble de définition est centré en 0, et pour tout x de $\mathbb{R}$,
$f(-x) = \sqrt{4(-x)^2+1}-2 = \sqrt{4x^2+1}-2 = f(x)$; donc la fonction f est paire.

4. Les variations de f : la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables ;
et $f'(x) = \dfrac{8x}{2\sqrt{4x^2+1}} = \dfrac{4x}{\sqrt{4x^2+1}}$ qui est du signe du numérateur, donc du signe de x. Donc, la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

5. Le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

6. a) Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) - (2x-2) = \sqrt{4x^2+1}-2 - (2x-2) =$
$\sqrt{4x^2+1} - 2x = \dfrac{(\sqrt{4x^2+1}-2x)(\sqrt{4x^2+1}+2x)}{\sqrt{4x^2+1}+2x} = \dfrac{4x^2+1-4x^2}{\sqrt{4x^2+1}+2x} =$
$\dfrac{1}{\sqrt{4x^2+1}+2x}$. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2+1} = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$, par somme de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{4x^2+1}+2x) = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-(2x-2)) = 0$. Donc la droite d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote oblique à C en $+\infty$.

b) En utilisant la parité de la fonction f, la droite d'équation $y = -2x - 2$ est asymptote oblique à C en $-\infty$.

7. Une équation de la tangente T à la courbe C représentative de la fonction f au point d'abscisse 0 est donnée par $y = f'(0)(x-0) + f(0) = 0 - 1 = -1$. C'est une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

8. L'équation $f(x) = 0$ équivaut à $\sqrt{4x^2+1} = 2$ équivaut à $4x^2 + 1 = 4$ équivaut à $4x^2 = 3$ équivaut à $x^2 = \dfrac{3}{4}$; les solutions sont $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{-\sqrt{3}}{2}$.

EXERCICE 2 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+\backslash\{1\}$ par $f(x) = \dfrac{2-\sqrt{x}}{x-1}$.

Pour x strictement positif, on factorise le numérateur par $\sqrt{x}$ et le dénominateur par x :

$f(x) = \dfrac{2-\sqrt{x}}{x-1} = \dfrac{\sqrt{x}(\frac{2}{\sqrt{x}}-1)}{x(1-\frac{1}{x})} = \dfrac{\frac{2}{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}(1-\frac{1}{x})}$; comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}} = 0$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} (\dfrac{2}{\sqrt{x}}-1) = -1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} (1-\dfrac{1}{x}) = 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}(1-\dfrac{1}{x}) = +\infty$. Ainsi, par quotient de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

$\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{2-\sqrt{x}}{x-1} = -2$.

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} (2-\sqrt{x}) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} (x-1) = 0^+$; par quotient de limites, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} (2-\sqrt{x}) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} (x-1) = 0^-$; par quotient de limites, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = -\infty$.

EXERCICE 3 : On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2} u_n + 4$.

1. Les quatre premiers termes : $u_1 = \dfrac{1}{2} \times 1 + 4 = \dfrac{9}{2}$; $u_2 = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{9}{2} + 4 = \dfrac{25}{4}$; $u_3 = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{25}{4} + 4 = \dfrac{57}{8}$.

2. On pose $v_n = u_n - 8$.

a) Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = u_{n+1} - 8 = \frac{1}{2} u_n + 4 - 8 = \frac{1}{2} u_n - 4 = \frac{1}{2}(u_n - 8) = \frac{1}{2} v_n$. Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 8 = 1 - 8 = -7$.

b) Pour tout entier naturel n, $v_n = -7\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $u_n = v_n + 8 = 8 - 7\left(\frac{1}{2}\right)^n = 8 - \frac{7}{2^n}$.

3. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 8 - 7\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(8 - 7\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n - 7\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 7\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} > 0$, donc la suite (u_n) est strictement croissante .

4. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 8$.

5. $\sum_{k=0}^{k=10} v_k$ est la somme des 11 premiers termes de la suite géométrique (v_n), donc $\sum_{k=0}^{k=10} v_k = v_0 \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{1-\frac{1}{2}} =$

$$-7\frac{1-\frac{1}{2^{11}}}{\frac{1}{2}} = -14\left(1-\frac{1}{2048}\right) = -14\left(\frac{2047}{2048}\right) = \frac{-14329}{1024}.$$

EXERCICE 4 : On considère la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \dfrac{15n+36}{2n+4}$.

1. Les quatre premiers termes : $w_0 = \frac{36}{4} = 9$; $w_1 = \frac{15+36}{2+4} = \frac{17}{2}$; $w_2 = \frac{15\times2+36}{2\times2+4} = \frac{33}{4}$;
$w_3 = \frac{15\times3+36}{2\times3+4} = 8{,}1$.

2. Le sens de variations de la suite (w_n) est donnée par les variations de la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{15x+36}{2x+4}$, dérivable sur ce même intervalle, et $f'(x) = \dfrac{-12}{(2x+4)^2} < 0$; donc la fonction f est strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$ et la suite (w_n) est strictement décroissante.

3. La limite de la suite (w_n) est la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{15x+36}{2x+4} = \dfrac{15}{2}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \dfrac{15}{2}$.