EXERCICE 1 (8 points)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{4x^2+1}-2$ et C la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan .

1. Montrer que l'ensemble de définition de la fonction f est $D_f = \mathbb{R}$.
2. Déterminer les limites de la fonction aux bornes de son ensemble de définition.
3. Étudier la parité de la fonction f .
4. Étudier les variations de f .
5. Dresser le tableau de variations de la fonction f .
6. a) Montrer que la droite d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote oblique à C .
b) En utilisant la question 3, déterminer une autre asymptote oblique à C .
7. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C représentative de la fonction f au point d'abscisse 0.
8. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

EXERCICE 2 (3 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{2-\sqrt{x}}{x-1}$.

Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

EXERCICE 3 (6 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 4$.

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite (u_n) .
2. On pose $v_n = u_n - 8$.
a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Préciser son premier terme.
b) En déduire v_n , puis u_n en fonction de n .
3. Étudier le sens de variations de la suite (u_n) .
4. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
5. Calculer la somme $\sum_{k=0}^{k=10} v_k$.

EXERCICE 4 (3 points)

On considère la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \frac{15n+36}{2n+4}$.

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite (w_n) .
2. Étudier le sens de variations de la suite (w_n) .
3. Quelle est la limite de la suite (w_n) ?