

CORRECTION

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \cos^2(x)$ et C sa courbe représentative.

1. a) Pour tout réel x , on sait que $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, donc $0 \leq \cos^2(x) \leq 1$, et $x \leq f(x) \leq x + 1$.

b) On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty$, donc par le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. De même,

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 = -\infty$, donc par le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

c) L'encadrement précédent permet d'affirmer que la courbe C est située entre la droite d'équation $y = x$ et la droite d'équation $y = x + 1$.

2. Les abscisses des points d'intersection de la courbe C avec la droite (d_1) sont les solutions de l'équation : $f(x) = x$, qui équivaut à $\cos^2(x) = 0$, soit $\cos(x) = 0$. Les solutions de cette équation sont les nombres $\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Les ordonnées respectives sont $\frac{\pi}{2} + k\pi$.

Les abscisses des points d'intersection de la courbe C avec la droite (d_2) sont les solutions de l'équation : $f(x) = x + 1$, qui équivaut à $\cos^2(x) = 1$, soit $\cos(x) = 1$ ou $\cos(x) = -1$. Les solutions de ces équations sont les nombres $k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Les ordonnées respectives sont $k\pi + 1$.

3. a) La fonction f est dérivable comme somme et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. La dérivée de $\cos x$ est $-\sin x$, et la dérivée de u^2 est $2uu'$. D'où, pour tout réel x , $f'(x) = 1 - 2\sin(x)\cos(x) = 1 - \sin(2x)$.

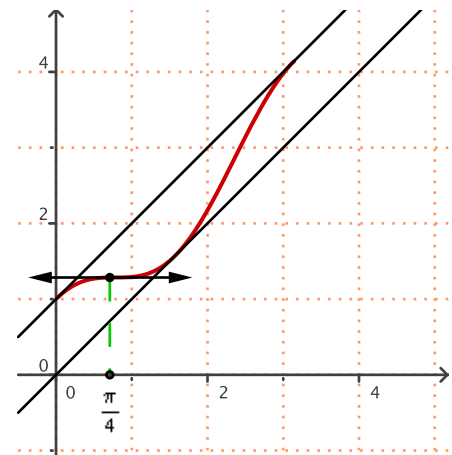
b) On sait que, pour tout réel x , $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, donc $-1 \leq -\sin(2x) \leq 1$, et $0 \leq f'(x) \leq 2$. Donc la dérivée est positive et la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

c) L'équation $f'(x) = 0$ équivaut à $\sin(2x) = 1$, équivaut à $2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ équivaut à $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. a) Le tableau de variations de f sur $[0; \pi]$:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	π
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	1	$\pi + 1$	

b) Représentation graphique de f sur $[0; \pi]$:



5. a) Pour tout réel x , on a $f(x + \pi) = x + \pi + \cos^2(x + \pi) = x + \pi + \cos^2(x)$

car $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$, donc $f(x + \pi) = f(x) + \pi$.

b) Pour $x \in [0; \pi]$, soit $M(x; y)$ un point de la courbe C .

Comme $f(x + \pi) = f(x) + \pi$, le point de la courbe d'abscisse

$(x + \pi)$ a pour ordonnée $f(x + \pi) = f(x) + \pi = y + \pi$.

On déduit la courbe C de la représentation graphique de f sur

$[\pi; 2\pi]$ par une translation de vecteur $\pi \vec{i} + \pi \vec{j} =$

$\pi(\vec{i} + \vec{j})$. Etc...

On déduit la courbe C de la représentation graphique de f sur

$\mathbb{R}$ par des translations de vecteur $k\pi \vec{i} + k\pi \vec{j}$ avec

$k \in \mathbb{Z}$.

