

**EXERCICE**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x + \cos^2(x)$  et  $C$  sa courbe représentative.

1. a) Démontrer que pour tout réel  $x$ ,  $x \leq f(x) \leq x + 1$ .

b) En déduire les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

c) Interpréter graphiquement l'encadrement précédent.

2. On note  $(d_1)$  et  $(d_2)$  les droites d'équation  $y = x$  et  $y = x + 1$ .

Déterminer les points d'intersection de la courbe  $C$  avec la droite  $(d_1)$ , puis avec la droite  $(d_2)$ .

3. a) Déterminer la fonction dérivée  $f'$  de  $f$ . Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = 1 - \sin(2x)$ .

b) En déduire le sens de variations de la fonction  $f$ .

c) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $f'(x) = 0$ .

4. a) Dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $[0; \pi]$ .

b) Tracer  $(d_1)$ ,  $(d_2)$  et la représentation graphique de  $f$  sur  $[0; \pi]$ .

5. a) Démontrer que pour tout réel  $x$ ,  $f(x + \pi) = f(x) + \pi$ .

b) Comment déduit-on la courbe  $C$  de la représentation graphique de  $f$  sur  $[0; \pi]$  ?