CORRECTION DU GROUPE BRAIN-PREPA (www.brainprepa.com)

EXERCICE 1 : 1. a) La fonction g est un polynôme donc elle est dérivable et donc continue sur $\mathbb{R}$. On a $g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2-1)$ s'annule en -1 et 1. D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	-6	↗	$+\infty$

b) Sur l'intervalle $]-\infty;1]$, la fonction g atteint un maximum de -2, donc l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution sur cet intervalle. Sur]1 ; +∞[, la fonction g est continue et strictement croissante de]1 ; +∞[dans]-6 ; +∞[; 0 appartient à]-6 ; +∞[, donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in$]1 ; +∞[. Valeur approchée de α au centième près : 2,19.
c) Donc $g(x) < 0$ sur] −∞ ; α [et $g(x) > 0$ sur]α ; +∞[.

2. a) La fonction f est dérivable comme quotient de fonctions dérivables sur]1 ; +∞[. Sa dérivée f' est donnée par $f'(x) = \dfrac{x(x^3-3x-4)}{(x^2-1)^2} = \dfrac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$; sur]1 ; +∞[, $x > 0$ et $(x^2 - 1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.

b) On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}(x^3+2x^2) = 3$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}(x^2-1) = 0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = +\infty$. Ainsi, la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à C. c) Tableau de variations de f : une valeur approchée de $f(\alpha) = 5,29$.

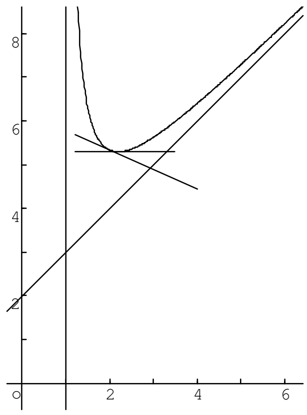
x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

d) La droite (d) d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique à la courbe C si $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(x+2)) = 0$; on a $f(x)-(x+2) = \dfrac{x+2}{x^2-1}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+2}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

La position relative de (d) et de C est donnée par le signe de $f(x)-(x+2) = \dfrac{x+2}{x^2-1}$.

Ainsi, sur]1 ; +∞[, $(x + 2)$ et $(x^2 - 1)$ sont > 0, donc (d) est au-dessous de C .

e) Une équation de la tangente à C au point d'abscisse 2 : $y = \dfrac{-4}{9}x + \dfrac{56}{9}$



EXERCICE 2 : a) Soit (Pn) la propriété $0 \le u_n \le 3$. (P0) est vraie puisque $u_0 = 3 \ge 0$.
Supposons (Pn) vraie pour un certain n et montrons que (Pn+1) est vraie : on a $0 \le u_n \le 3$ d'où $1 \le 1+u_n \le 4$ d'où $\dfrac{1}{4} \le \dfrac{1}{1+u_n} \le 1$ d'où $\dfrac{1}{2} \le \dfrac{2}{1+u_n} \le 2$; donc $0 \le u_{n+1} \le 3$ et pour tout entier naturel n , $0 \le u_n \le 3$.

c) On a $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2} = \dfrac{1-u_n}{4+2u_n} = \dfrac{-1}{2}\left(\dfrac{u_n-1}{u_n+2}\right) = \dfrac{-1}{2}v_n$; donc la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{-1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{u_0-1}{u_0+2} = \dfrac{2}{5}$.

d) Donc $v_n = \dfrac{2}{5}\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n$. Comme la raison est strictement comprise entre -1 et 1, la limite de (v_n) est 0.

e) On a $v_n(u_n+2) = u_n - 1$ et $u_n = \dfrac{-1-2v_n}{v_n-1} = \dfrac{-1-\frac{4}{5}\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{\frac{2}{5}\left(\frac{-1}{2}\right)^n - 1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ donc la suite (u_n) converge vers 1.

EXERCICE 3 : a) Pour tout réel $x \ne 0$, on a $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \dfrac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}$.

b) Ainsi $\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \dfrac{1}{2}$. Cette limite n'est pas égale à $f(0) = 0$, donc la fonction f n'est pas continue en 0. Donc elle n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.
La fonction f n'est pas dérivable en 0 puisqu'elle n'est pas continue en 0. Par contre, si on pose $f(0) = ½$, alors la fonction f est continue et dérivable sur] -1 ; +∞[, et $f'(0) = - 1/8$.