EXERCICE 1 (9 points)

1. a) Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = x^3 - 3x - 4$. Etudier le sens de variations de g sur IR.

b) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur IR, notée α. Donner une valeur approchée de α au centième près.

c) En déduire le signe de $g(x)$ sur IR.

2. Soit f la fonction définie sur $]1 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$.

a) Montrer que la dérivée f' de la fonction f a le même signe que $g(x)$ sur $]1 ; +\infty[$.

b) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Préciser les éventuelles asymptotes.

c) Dresser le tableau de variations de f et donner une valeur approchée de $f(\alpha)$.

d) Démontrer que la droite (d) d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique à la courbe C représentative de la fonction f. Préciser la position relative de (d) et de C.

e) Déterminer une équation de la tangente à C au point d'abscisse 2.

f) Construire C, les asymptotes et les tangentes en 2 et en α, dans un repère orthonormé.

EXERCICE 2 (6 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{2}{1 + u_n}$.

a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 3$.

b) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n, par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

c) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

d) Ecrire alors v_n en fonction de n. Déterminer la limite de la suite (v_n).

e) Ecrire u_n en fonction de n. Etudier la convergence de la suite (u_n).

EXERCICE 3 (5 points)

On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

a) Montrer que pour tout réel $x \neq 0$, on a $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1} + 1}$.

b) Etudier la limite de la fonction f en 0. La fonction f est-elle continue en 0 ? Est-elle continue sur IR ?

Question subsidiaire : La fonction f est-elle dérivable en 0 ?