EXERCICE 1 : 1. a) On peut écrire $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)^2/2^{n+1}}{n^2/2^n} = \dfrac{(n+1)^2}{2^{n+1}}\times\dfrac{2^n}{n^2} = \dfrac{1}{2}\times\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n} = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{1}{n} = 1$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{1}{2}$.

b) On a vu que $v_n = \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2$. Or pour tout entier naturel $n > 0$, $1 + \dfrac{1}{n} > 1$, donc $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2 > 1$ et $v_n > \dfrac{1}{2}$.

c) On cherche le plus petit entier N tel que, si $n \geqslant N$, $v_n < \dfrac{3}{4}$. Montrons d'abord que (v_n) est décroissante :

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^2 - \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2 = \dfrac{1}{2}\left[\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^2-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2\right] = \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n+1}-1-\dfrac{1}{n}\right)\left(1\dfrac{1}{n+1}+1\dfrac{1}{n}\right) =$

$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-1}{n(n+1)}\right)\left(\dfrac{2n^2+4n+1}{n(n+1)}\right) < 0$, donc $v_{n+1} < v_n$ et (v_n) est décroissante. On a $v_4 = 0{,}78$ et $v_5 = 0{,}72$, donc N = 5.

d) Pour $n \geqslant N$, on a $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < \dfrac{3}{4}$ donc $u_{n+1} < \dfrac{3}{4}\, u_n$.

2. a) Montrons par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 5$: $u_n \leqslant \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$:

Initialisation : pour $n = 5$, $u_5 \leqslant \left(\dfrac{3}{4}\right)^0 u_5$, donc la propriété est vraie pour $n = 5$.

Hérédité : Supposons que pour une valeur de $n \geqslant 5$, $u_n \leqslant \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$; alors $u_{n+1} < \dfrac{3}{4}\, u_n \leqslant \dfrac{3}{4}\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$, donc

$u_{n+1} \leqslant \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-4} u_5$. Ce qui prouve l'hérédité.

Conclusion: pour tout entier $n \geqslant 5$: $u_n \leqslant \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$.

b) $S_n = u_5 + u_6 + u_7 + ... + u_n \leqslant u_5 + \left(\dfrac{3}{4}\right) u_5 + \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 u_5 + \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-5} u_5 \leqslant \left[1+\dfrac{3}{4}+\left(\dfrac{3}{4}\right)^2+...+\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-5}\right] u_5$.

c) La suite de terme générale $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-5}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{3}{4}$,

donc la somme $\left[1+\dfrac{3}{4}+\left(\dfrac{3}{4}\right)^2+...+\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-5}\right] = 1\times\dfrac{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-4}}{1-\dfrac{3}{4}} = 4\left[1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-4}\right]$. Pour tout entier $n \geqslant 5$, le nombre

$\left[1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-4}\right] < 1$, donc $S_n \leqslant 4u_5$.

3. On a $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2}{2^{n+1}} > 0$, donc la suite $(S_n)_{n\geqslant 5}$ est croissante.

Cette suite $(S_n)_{n\geqslant 5}$ est croissante et majorée par $4u_5$, donc elle converge.

EXERCICE 2 : 1. a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$. Et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{3}}{2x} = 0$. Ainsi C

admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$ (axe des ordonnées) et une asymptote oblique d'équation $y = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

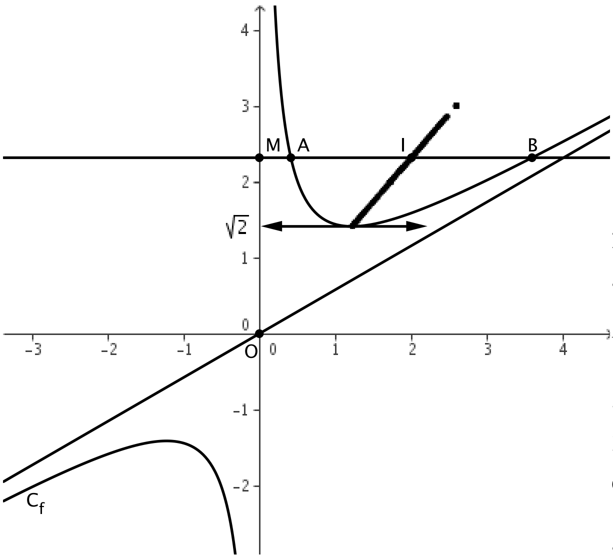
b) La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme et quotient de fonctions qui le sont.

Et $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{-2\sqrt{3}}{4x^2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{-\sqrt{3}}{2x^2} = \dfrac{2x^2-3}{2x^2\sqrt{3}}$. Le signe de cette dérivée dépend du numérateur puisque le dénominateur est strictement positif. $2x^2 - 3$ s'annule en $x = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$ et $x = -\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Le tableau de variations de f :

x	0		$\sqrt{\dfrac{3}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\sqrt{2}$	↗	$+\infty$

c) Tracé de la courbe C:



2. D'après le tableau de variations, si $m < \sqrt{2}$, il n'y a aucun point d'intersection entre C et (d). Si $m = \sqrt{2}$, il y a un point d'intersection de coordonnées ($\sqrt{\dfrac{3}{2}}$; $\sqrt{2}$).

Si $m > \sqrt{2}$, il y a deux points d'intersection.

3. Dans la suite, on suppose que $m > \sqrt{2}$, et on appelle A et B les points d'intersection de C et (d).

a) Les abscisses de A et B vérifient l'équation $\dfrac{x}{\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{3}}{2x} = m$, soit $2x^2 - 2xm\sqrt{3} + 3 = 0$. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 12m^2 - 24 = 12(m^2 - 2)$. Si $m > \sqrt{2}$, $\Delta > 0$, et l'équation a deux solutions

$x_A = \dfrac{2m\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\sqrt{m^2-2}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}(m - \sqrt{m^2-2})}{2}$ et $x_B = \dfrac{\sqrt{3}(m + \sqrt{m^2-2})}{2}$. Le produit des abscisses de A et B est égal à $\dfrac{\sqrt{3}(m-\sqrt{m^2-2})}{2} \times \dfrac{\sqrt{3}(m+\sqrt{m^2-2})}{2} = \dfrac{3(m^2-(m^2-2))}{4} = \dfrac{3}{2}$.

b) Soit I le milieu de [AB]. A l'aide de GeoGebra, on conjecture que, lorsque m décrit l'intervalle [$\sqrt{2}$; $+\infty$ [, le point I se trouve sur une demie-droite passant par l'origine du repère, donc d'équation $y = ax$. Déterminons a :

L'abscisse de I est égale à $\dfrac{x_A + x_B}{2} = m\sqrt{3}$, et son ordonnée est égale à $y_I = y_A = y_B = m$. Donc $y_I = \sqrt{3}\, x_I$.

Donc $a = \sqrt{3}$. La demie-droite a pour origine le point S($\sqrt{\dfrac{3}{2}}$; $\sqrt{2}$).