CORRIGÉ

EXERCICE 1 : On considère la fonction f définie sur]– 1 ; 1] par $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

1. On a $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} (1+x) = 0^{+}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} (1-x) = 2$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \dfrac{1-x}{1+x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x) = +\infty$. Et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{0}{2} = 0$.

2. La fonction f est continue en 1 puisque $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{0}{2} = f(1) = 0$.

3. Pour étudier la dérivabilité de la fonction f en 1, on calcule $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} \times \dfrac{-1}{1-x} =$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{-1}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}$. Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sqrt{(1-x)(1+x)} = 0^{+}$, alors $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\infty$. Donc la fonction f n'est pas dérivable en 1. Par contre, la courbe représentative de f admet une tangente verticale au point d'abscisse 1.

4. Une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 est donnée par : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$. Pour déterminer $f'(0)$, on calcule la dérivée de f sur]– 1; 1[intervalle sur lequel la fonction est dérivable comme composée et quotient de fonctions qui le sont et de la forme $\sqrt{u}$. Et $f'(x) = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}} = \dfrac{u'}{2} \times \dfrac{1}{\sqrt{u}} =$

$\dfrac{-2}{2(1+x)^2} \times \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$, d'où $f'(0) = -1$. Ainsi l'équation de la tangente est $y = -1(x) + 1 = -x + 1$.

EXERCICE 2 : 1. L'ensemble de définition de f est centré en 0, et pour tout réel x,
$f(-x) = (-x)^2 - \cos(-x) = x^2 - \cos x = f(x)$. Donc la fonction f est paire.
2. Pour tout réel $x > \pi$, $x^2 > \pi^2$ soit $x^2 - \cos x > \pi^2 - 1$, puisque $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$. Or $\pi^2 - 1 > 0$, donc $f(x) > 0$.
3. La fonction f est dérivable ainsi que sa dérivée car elles sont sommes de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, $f'(x) = 2x + \sin x$ et $f''(x) = 2 + \cos x > 0$ puisque $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$. Donc la fonction
4. Comme $f''(x) > 0$ sur $[0; \pi]$, alors la fonction f' est strictement croissante sur $[0; \pi]$.
5. On a $f'(0) = 0$ et f' strictement croissante sur $[0; \pi]$ implique que pour tout réel x de $[0; \pi]$, $f'(x) > f'(0) = 0$.
Donc $f'(x) \geqslant 0$ sur $[0; \pi]$.
6. Si $f'(x) \geqslant 0$ sur $[0; \pi]$, alors f est strictement croissante sur $[0; \pi]$.
7. La fonction f est continue puisque dérivable et strictement croissante de $[0; \pi]$ dans $[-1; 1+\pi^2]$.
Comme $0 \in [-1; 1+\pi^2]$, par le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ qui est équivalente à l'équation (E) admet une unique solution α sur $[0; \pi]$.
8. A l'aide de la calculatrice, on trouve $\alpha = 0{,}82$ à 10^{-2} près.
9. Puisque la fonction f est paire, $-\alpha$ est aussi solution de (E). De plus, par la question 2, il n'existe pas d'autre solution sur $\mathbb{R}$. Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont α et $-\alpha$.

EXERCICE 3 :

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2} u_n + 3$.

1. a) En utilisant un raisonnement par récurrence : La propriété P_n est $u_n \leqslant 6$.
Initialisation: P_0 est vraie puisque $u_0 = -2 \leqslant 6$.

Hérédité : Supposons P_n vraie pour une valeur de n et montrons que P_{n+1} est vraie : $u_n \leqslant 6$ entraîne $\dfrac{1}{2} u_n \leqslant 3$ entraîne $\dfrac{1}{2} u_n + 3 \leqslant 6$ soit $u_{n+1} \leqslant 6$. Donc pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 6$ et la suite est majorée par 6.

b) On a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} u_n + 3 - u_n = -\frac{1}{2} u_n + 3$. Comme, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 6$, alors $\frac{1}{2} u_n \leqslant 3$,

d'où $-\frac{1}{2} u_n \geqslant -3$, d'où $-\frac{1}{2} u_n + 3 \geqslant 0$, alors $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, et la suite (u_n) est croissante.

c) Des deux questions précédentes, on peut déduire que la suite converge puisqu'elle est majorée te croissante.
Sa limite l vérifie $-2 \leqslant l \leqslant 6$.

2. On considère la suite numérique (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 6$.

a) On a $v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{1}{2} u_n + 3 - 6 = \frac{1}{2} u_n - 3 = \frac{1}{2} (u_n - 6) = \frac{1}{2} (v_n)$. Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et le premier terme $v_0 = u_0 - 6 = -8$.

b) Ainsi, pour tout entier naturel n, $v_n = -8\left(\frac{1}{2}\right)^n$. De plus, $v_n = u_n - 6$ implique $u_n = v_n + 6 = -8\left(\frac{1}{2}\right)^n + 6$.

c) Comme la raison de la suite (v_n) est strictement comprise entre -1 et 1, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 6$.

EXERCICE 4 :

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.

1. En utilisant un raisonnement par récurrence : La propriété P_n est $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.
Initialisation: P_0 est vraie puisque $u_0 = 0$ et $0 \leqslant 0 \leqslant 2$.
Hérédité : Supposons P_n vraie pour une valeur de n et montrons que P_{n+1} est vraie : $0 \leqslant u_n \leqslant 2$ entraîne $1 \leqslant 1 + u_n \leqslant 3$ entraîne $1 \leqslant \sqrt{1+u_n} \leqslant \sqrt{3}$ (car la fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$),
soit $0 < 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant \sqrt{3} < 2$. Donc pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$ et la suite est bornée par 0 et 2.

2. En utilisant un raisonnement par récurrence : La propriété P_n est $u_n \leqslant u_{n+1}$.
Initialisation: P_0 est vraie puisque $u_1 = 1$, $u_0 = 0$ et $0 < 1$.
Hérédité : Supposons P_n vraie pour une valeur de n et montrons que P_{n+1} est vraie : $u_n \leqslant u_{n+1}$ entraîne $1 + u_n \leqslant 1 + u_{n+1}$ entraîne $\sqrt{1+u_n} \leqslant \sqrt{1+u_{n+1}}$ (car la fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$),
soit $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$. Donc pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$ et la suite est croissante.

3. Comme la suite (u_n) est croissante et majorée par 2, elle converge vers un réel l tel que $0 \leqslant l \leqslant 2$.
A la limite, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, donc l vérifie l'équation : $l = \sqrt{1+l}$. On élève au carré : $l^2 = 1 + l$ soit $l^2 - 1 - l = 0$. Le discriminant $\Delta = 5 > 0$, il y a deux solutions $l_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $l_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. La solution l_2 n'est pas comprise entre 0 et 2, donc la limite de la suite est $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (nombre d'or).