

EXERCICE 1 (8 points)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$.

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
- Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- a) Montrer que pour $x \in]-\infty ; 1[$, $\frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x - 1} = -\sqrt{\frac{x - 3}{x - 1}}$.
b) La fonction f est-elle dérivable en 1 ?
- Étudier les variations de f sur l'ensemble $]-\infty ; 1[\cup]3 ; +\infty[$.
- Dresser le tableau de variations de f .
- Montrer que les droites d'équation $y = x - 2$ et $y = -x + 2$ sont asymptotes obliques à la courbe C représentative de f .

EXERCICE 2 (5 points)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

- Étudier la parité de la fonction f .
- Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.
- On admet que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.
- Déduire des questions 1 et 3 que $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.
- Que peut-on déduire des questions 1, 3 et 4 pour la courbe C représentative de la fonction f ?

EXERCICE 3 (7 points)

- On considère la suite numérique (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.
 - Étudier le sens de variations de la suite (u_n) .
 - En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_n > n^2$.
 - Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
- Calculer les quatre premiers termes de la suite.
 - Conjecturer une expression simple de u_n en fonction de n .
 - Démontrer cette conjecture.
- On considère la suite (v_n) définie sur \mathbb{N} par $v_n = u_{n+1} - u_n$.
 - Montrer que, pour tout entier naturel n , $v_n = 2n + 3$.
 - Calculer la somme des vingt premiers termes de la suite (v_n) .