EXERCICE 1

Les règles de reproduction chez les abeilles sont telles que l'abeille femelle a un père et une mère tandis que l'abeille mâle n'a qu'une mère.

1. Soit u_n le nombre d'ancêtres d'une abeille mâle à la génération n : ainsi $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 3$.

Soit F_n le nombre d'ancêtres femelles et M_n le nombre d'ancêtres mâles à la génération n de cette abeille mâle. Alors $u_n = F_n + M_n$.

a) Montrer que $u_n = F_{n+1}$ et que $M_{n+1} = F_n$.

b) En déduire que $u_{n+1} = u_n + F_n = u_n + u_{n-1}$.

Une telle suite est appelée suite de Fibonacci.

2. On considère la suite de Fibonacci telle que $u_0 = u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, pour tout entier naturel n.

a) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$. En déduire la limite de la suite (u_n).

b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $(u_n)^2 = u_{n-1}\, u_{n+1} + (-1)^n$.

3. On pose $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

a) Montrer que $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(-1)^n}{u_n u_{n+1}}$.

b) En déduire la limite de $v_{n+1} - v_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4. On pose $w_n = v_{2n-1}$ et $t_n = v_{2n}$.

a) Étudier le sens de variations des suites (w_n) et (t_n).

b) Montrer que les suites (w_n) et (t_n) sont adjacentes. En déduire que la suite (v_n) converge vers une limite L.

c) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} [(v_n)^2 - v_n - 1] = 0$.

d) Montrer que $L^2 - L - 1 = 0$.

e) En déduire que (v_n) converge vers le nombre d'or.

EXERCICE 2

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^{-x} - x^2 + 2x$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

a) Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b) Déterminer f' puis f'' (où f'' désigne la dérivée de f').

c) Étudier le signe de f'' et en déduire les variations de f'.

d) Déterminer le signe de f' et en déduire les variations de f.

2. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

b) Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

3. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x^2 + 2x$ et C' sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

a) Étudier la position relative des courbes C et C'.

b) Soit M le point d'abscisse x de la courbe C et P le point de même abscisse de la courbe C'.

Déterminer un réel a tel que pour tout $x \geqslant a$, la distance MP soit inférieure à 10^{-3}.

4. Représenter graphiquement C, C' et la tangente à C au point d'abscisse 0.