

CORRIGÉ DEVOIR MAISON N° 3

EXERCICE 1 : On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 2]$ par $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$.

1. a) La fonction f est dérivable sur $[0 ; 2]$ comme quotient de fonctions dérivables,

et $f'(x) = \frac{2(x+1) - (2x+1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$, donc la fonction f est strictement croissante sur $[0 ; 2]$.

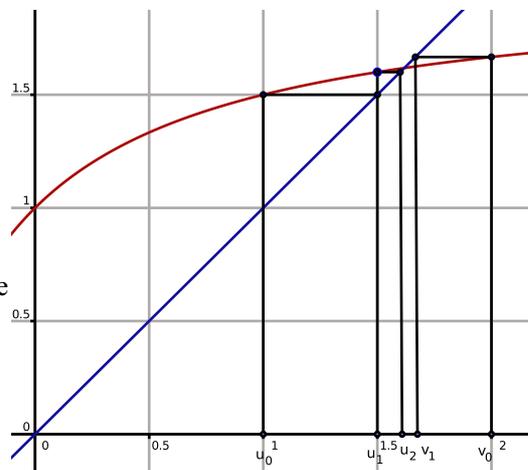
b) On a $f(0) = 1$ et $f(2) = \frac{5}{3}$; donc si $x \in [0 ; 2]$, soit $0 \leq x \leq 2$,

alors $f(0) \leq f(x) \leq f(2)$, soit $1 \leq f(x) \leq \frac{5}{3}$, et donc $f(x) \in [0 ; 2]$.

2. On considère les suites (u_n) et (v_n) définie sur \mathbb{N} par :

$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$; $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = f(v_n)$.

a) Représentation graphique de f sur $[0 ; 2]$ et construction des quatre premiers termes des suites (u_n) et (v_n) :



c) Conjecture : la suite (u_n) est croissante et converge vers l'abscisse du point d'intersection de C_f et de la droite (d) d'équation $y = x$. La suite (v_n) est décroissante et converge vers l'abscisse du point d'intersection de C_f et (d).

3. Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n :

a) $1 \leq v_n \leq 2$:

Initialisation : $v_0 = 2$, donc $1 \leq v_0 \leq 2$; la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : on suppose que pour un entier k , $1 \leq v_k \leq 2$, et montrons que $1 \leq v_{k+1} \leq 2$:

par la croissance de la fonction f , $f(1) \leq f(v_k) \leq f(2)$, soit $\frac{3}{2} \leq f(v_k) \leq \frac{5}{3}$, donc $1 \leq v_{k+1} \leq 2$.

Conclusion : Pour tout entier naturel n : $1 \leq v_n \leq 2$.

b) Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} \leq v_n$:

Initialisation : $v_1 = \frac{5}{3} < v_0 = 2$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : on suppose que pour un entier k , $v_{k+1} \leq v_k$, et montrons que $v_{k+2} \leq v_{k+1}$:

par la croissance de la fonction f , $f(v_{k+1}) \leq f(v_k)$, soit $v_{k+2} \leq v_{k+1}$. Donc pour tout entier naturel n : $v_{n+1} \leq v_n$.

c) $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{2v_{n+1}}{v_{n+1}+1} - \frac{2u_{n+1}}{u_{n+1}+1} = \frac{(2v_{n+1}+1)(u_{n+1}+1) - (2u_{n+1}+1)(v_{n+1}+1)}{(v_{n+1}+1)(u_{n+1}+1)} = \frac{v_n - u_n}{(v_{n+1}+1)(u_{n+1}+1)}$.

4. Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n , $v_n - u_n \geq 0$:

Initialisation : $v_0 - u_0 = 2 - 1 > 0$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : on suppose que pour un entier k , $v_k - u_k \geq 0$, et montrons que $v_{k+1} - u_{k+1} \geq 0$:

$v_k - u_k \geq 0$, $v_k + 1 \geq 0$, et $u_k + 1 \geq 0$, entraîne $v_{k+1} - u_{k+1} = \frac{v_k - u_k}{(v_k+1)(u_k+1)} \geq 0$.

Conclusion : Pour tout entier naturel n : $v_n - u_n \geq 0$.

On sait que, pour tout entier naturel n , $1 \leq v_n \leq 2$ et $1 \leq u_n \leq 2$, donc $v_n + 1 \geq 2$, et $u_n + 1 \geq 2$,

donc $(v_n + 1)(u_n + 1) \geq 4$, d'où $0 < \frac{1}{(v_n+1)(u_n+1)} \leq \frac{1}{4}$, d'où $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(v_n - u_n)$.

5. Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n , $v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$:

Initialisation : $v_0 - u_0 = 1 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^0 = 1$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : on suppose que pour un entier k , $v_k - u_k \leq \left(\frac{1}{4}\right)^k$, et montrons que $v_{k+1} - u_{k+1} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}$:

$v_{k+1} - u_{k+1} \leq \frac{1}{4}(v_k - u_k) \leq \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^k = \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}$. Conclusion : Pour tout entier naturel n : $v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

6. La suite (v_n) est décroissante et minorée par 1, donc elle converge vers un réel l . La suite (u_n) est croissante et

majorée par 2, donc elle converge vers un réel l' . On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$, suite géométrique de raison strictement comprise entre -1 et 1 . Comme $0 \leq v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$, par le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$. A la limite, $l - l' = 0$, donc $l = l'$. Donc les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite α . Pour déterminer la valeur exacte de α , on résout l'équation $f(x) = x : \frac{2x+1}{x+1} = x$ équivaut à $2x+1 = x^2+x$ et $x \neq -1$ équivaut à $x^2 - x - 1 = 0$ et $x \neq -1$. Le discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5$; il y a deux solutions réelles : $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Comme la limite commune doit être comprise entre 1 et 2, alors $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

EXERCICE 2 : 1. La dérivée de la fonction tangente sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ est égale à

$$(\tan(x))' = \frac{\cos(x) \times \cos(x) - \sin(x) \times (-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \tan^2(x) + 1.$$

2. On considère les fonctions f et g définie sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = \tan(x) - x$ et $g(x) = \tan(x) - 2x$.

a) La fonction f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ comme somme de fonctions dérivables ;

et $f'(x) = \tan^2(x) + 1 - 1 = \tan^2(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

Comme $f(0) = \tan(0) - 0 = 0$, la fonction f est négative sur $]-\frac{\pi}{2}; 0]$ et positive sur $[0; \frac{\pi}{2}[$.

b) La fonction g est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ comme somme de fonctions dérivables ;

et $g'(x) = \tan^2(x) + 1 - 2 = \tan^2(x) - 1 = (\tan(x) - 1)(\tan(x) + 1)$. $\tan(x) - 1 = 0$ pour $\tan(x) = 1$, soit $x = \frac{\pi}{4}$.

$\tan(x) + 1 = 0$ pour $\tan(x) = -1$, soit $x = -\frac{\pi}{4}$.

D'où le tableau de variations de g :

c) Une équation de la tangente à C représentative de la fonction f en $x = 0$ est $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = 0$.

d) Il y a trois solutions à l'équation $g(x) = 0$ sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$: une α sur $]-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}[$, une

sur $]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[$ qui est 0 et une β sur

$]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}[$. On en déduit le signe de g sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$:

négative sur $]-\frac{\pi}{2}; \alpha]$ et sur $[0; \beta]$; positive sur $[\alpha; 0]$ et sur $[\beta; \frac{\pi}{2}[$.

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$			
$g'(x)$	+	0	-	0	+		
$g(x)$	$-\infty$	\nearrow	$\frac{\pi}{2} - 1$	\searrow	$1 - \frac{\pi}{2}$	\nearrow	$+\infty$

3. On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ par $h(x) = \tan(x) - x - \frac{x^3}{3}$.

La fonction h est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ comme somme de fonctions dérivables ;

et $h'(x) = \tan^2(x) + 1 - 1 - x^2 = \tan^2(x) - x^2 = (\tan(x) - x)(\tan(x) + x) = f(x)(\tan(x) + x)$.

On sait que \tan est positif sur $[0; \frac{\pi}{2}[$ et négatif sur $]-\frac{\pi}{2}; 0]$. Donc $\tan(x) + x \leq 0$ sur $]-\frac{\pi}{2}; 0]$ et

$\tan(x) + x \geq 0$ sur $[0; \frac{\pi}{2}[$; de même pour f . Ainsi h' est positive sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et h est strictement croissante.

De plus, $h(0) = 0$, donc h est négative sur $]-\frac{\pi}{2}; 0]$ et positive sur $[0; \frac{\pi}{2}[$.

4. On considère la fonction j définie sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ par $j(x) = \tan(x) - x - \frac{4x^3}{3}$.

La fonction j est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ comme somme de fonctions dérivables ;

et $j'(x) = \tan^2(x) + 1 - 1 - 4x^2 = \tan^2(x) - 4x^2 = (\tan(x) - 2x)(\tan(x) + 2x) = g(x)(\tan(x) + 2x)$.

On sait que \tan est positif sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ et négatif sur $]-\frac{\pi}{2}; 0]$. Donc $\tan(x) + 2x \leq 0$ sur $]-\frac{\pi}{2}; 0]$ et

$\tan(x) + 2x \geq 0$ sur $]0; \frac{\pi}{2}[$; on connaît le signe de g . D'où le tableau de variations de j :

x	$-\frac{\pi}{2}$	α	0	β	$\frac{\pi}{2}$
$g(x)$	-	0	+ 0	- 0	+
$\tan(x) + 2x$	-		- 0	+	+
$j'(x)$	+	0	- 0	- 0	+
$j(x)$	$-\infty$	$\nearrow j(\alpha)$	$\searrow 0$	$\nearrow j(\beta)$	$+\infty$

5. Pour $x \in]0; \frac{\pi}{4}[$,

$h(x) \geq 0$, soit $\tan(x) - x - \frac{x^3}{3} \geq 0$, donc

$$x + \frac{x^3}{3} \leq \tan(x);$$

$j(x) \leq 0$, soit $\tan(x) - x - \frac{4x^3}{3} \leq 0$, donc

$$\tan(x) \leq x + \frac{4x^3}{3}. \text{ On trouve ainsi } x + \frac{x^3}{3} \leq \tan(x) \leq x + \frac{4x^3}{3}.$$

6. Pour $x \in]-\frac{\pi}{4}; 0]$,

$h(x) \leq 0$, soit $\tan(x) - x - \frac{x^3}{3} \leq 0$, donc $x + \frac{x^3}{3} \geq \tan(x)$;

$j(x) \geq 0$, soit $\tan(x) - x - \frac{4x^3}{3} \geq 0$, donc $\tan(x) \geq x + \frac{4x^3}{3}$. On trouve ainsi $x + \frac{4x^3}{3} \leq \tan(x) \leq x + \frac{x^3}{3}$.

7. Pour $x \in]0; \frac{\pi}{4}[$, $\frac{x^3}{3} \leq \tan(x) - x \leq \frac{4x^3}{3}$, d'où $\frac{x}{3} \leq \frac{\tan(x) - x}{x^2} \leq \frac{4x}{3}$.

Pour $x \in]-\frac{\pi}{4}; 0[$, $\frac{4x^3}{3} \leq \tan(x) - x \leq \frac{x^3}{3}$, d'où $\frac{4x}{3} \leq \frac{\tan(x) - x}{x^2} \leq \frac{x}{3}$.

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{3} = 0$, par le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - x}{x^2} = 0$.