

DEVOIR MAISON N° 3

EXERCICE 1

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 2]$ par $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$.

1. a) Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0 ; 2]$.
- b) Montrer que si $x \in [0 ; 2]$, alors $f(x) \in [0 ; 2]$.
2. On considère les suites (u_n) et (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
 $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$; $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = f(v_n)$.
- a) Représenter graphiquement la fonction f sur $[0 ; 2]$ dans un repère orthonormé (unité : 4 cm).
- b) Construire alors les quatre premiers termes de chacune des suites (u_n) et (v_n) sur le graphique.
- c) Conjecturer le sens de variations et la convergence des suites (u_n) et (v_n) .
3. Montrer que, pour tout entier naturel n :
a) $1 \leq v_n \leq 2$; b) $v_{n+1} \leq v_n$; (On admettra que $1 \leq u_n \leq 2$ et $u_n \leq u_{n+1}$)
c) $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_n - u_n}{(v_n + 1)(u_n + 1)}$.
4. En déduire que, pour tout entier naturel n , $v_n - u_n \geq 0$ et $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{4} (v_n - u_n)$.
5. Montrer que, pour tout entier naturel n , $v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.
6. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite α . Déterminer la valeur exacte de α .

EXERCICE 2

1. Montrer que la dérivée de la fonction tangente sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$ est égale à $\tan^2(x) + 1$.
2. On considère les fonctions f et g définie sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = \tan(x) - x$ et $g(x) = \tan(x) - 2x$.
- a) Étudier les variations de f sur $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$ et en déduire le signe de f sur $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$.
- b) Étudier les variations de g sur $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$ et en déduire son signe sur $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$.
- c) Préciser une équation de la tangente à la courbe C représentative de la fonction f en $x = 0$.
- d) Préciser le nombre de solutions de l'équation $g(x) = 0$ sur $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$.
3. On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$ par $h(x) = \tan(x) - x - \frac{x^3}{3}$.
Étudier les variations de h sur $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$ et en déduire son signe sur $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$ (on pourra utiliser le signe de la fonction f).
4. On considère la fonction j définie sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$ par $j(x) = \tan(x) - x - \frac{4x^3}{3}$.
Étudier les variations de j sur $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$ et en déduire son signe sur $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$ (on pourra utiliser le signe de la fonction g).
5. En déduire que pour $x \in [0 ; \frac{\pi}{2}[$, $x + \frac{x^3}{3} \leq \tan(x) \leq x + \frac{4x^3}{3}$.
6. Trouver un encadrement de $\tan$ sur $]-\frac{\pi}{2} ; 0]$.
7. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - x}{x^2}$.