

EXERCICE 1 : On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$.

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions qui le sont.

$$\text{Et } f'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}; \quad f''(x) = -\sin x + x; \quad f'''(x) = -\cos x + 1.$$

2. On sait que pour tout réel x , $-1 \leq \cos x \leq 1$, donc $f'''(x) \geq 0$, et la fonction f'' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On a $f''(0) = 0$, donc $f''(x) \leq 0$ sur $]-\infty; 0]$ et $f''(x) \geq 0$ sur $[0; +\infty[$.

Donc la fonction f' est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$. Elle admet donc un minimum global en $x = 0$ qui vaut $f'(0) = 0$; donc $f'(x) \geq 0$, et la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On a $f(0) = 0$, donc $f(x) \leq 0$ sur $]-\infty; 0]$ et $f(x) \geq 0$ sur $[0; +\infty[$.

3. Pour tout réel $x \geq 0$, $f(x) \geq 0$ donc $\sin x - x + \frac{x^3}{6} \geq 0$, soit $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x$. On a vu que $f''(x) = -\sin x + x \geq 0$

sur $[0; +\infty[$, donc $\sin x \leq x$. Ainsi, pour tout réel $x \geq 0$, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$.

4. Pour tout réel $x \leq 0$, on obtient de la même façon l'encadrement $x \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6}$.

5. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(0) = 1$ et pour $x \neq 0$, $g(x) = \frac{\sin x}{x}$.

a) On sait que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} =$ nombre dérivé de la fonction sinus en $0 = \cos(0) = 1 = g(0)$, donc la fonction g est continue en 0 .

b) Le taux d'accroissement de g en 0 est $\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} = \frac{\sin x - x}{x^2}$. En utilisant la question 3, pour tout

réel $x > 0$, $-\frac{x^3}{6} \leq \sin x - x \leq 0$ et $-\frac{x}{6} \leq \frac{\sin x - x}{x^2} \leq 0$. Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{6} = 0$, par le théorème des gendarmes,

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0$. De même, pour tout réel $x < 0$, $0 \leq \sin x - x \leq -\frac{x^3}{6}$ et $0 \leq \frac{\sin x - x}{x^2} \leq -\frac{x}{6}$. Par le

théorème des gendarmes, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0$. Donc la fonction g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.

EXERCICE 2 : On considère la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{1 + \sqrt{x-1}}$.

La fonction f est le quotient et la composée de fonctions dérivables sur $]1; +\infty[$, car la fonction racine carrée est dérivable sur $]0; +\infty[$. Donc f est dérivable en 2 .

On détermine la dérivée de f sur $]1; +\infty[$, de la forme $\frac{u}{v}$: $f'(x) = \frac{1 + \sqrt{x-1} - x \times \frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{(1 + \sqrt{x-1})^2} = \frac{2\sqrt{x-1} + 2(x-1) - x}{2\sqrt{x-1}(1 + \sqrt{x-1})^2} =$

$$\frac{2\sqrt{x-1} + x - 2}{2\sqrt{x-1}(1 + \sqrt{x-1})^2}. \text{ Et } f'(2) = \frac{2\sqrt{2-1} + 2 - 2}{2\sqrt{2-1}(1 + \sqrt{2-1})^2} = \frac{2}{2 \times 4} = \frac{1}{4}.$$

Pour étudier la dérivabilité de f en 1 , on détermine le taux d'accroissement de f en 1 qui est

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\frac{x}{1 + \sqrt{x-1}} - 1}{x - 1} = \frac{x - 1 - \sqrt{x-1}}{(x-1)(1 + \sqrt{x-1})} = \frac{(\sqrt{x-1})^2 - \sqrt{x-1}}{(\sqrt{x-1})^2(1 + \sqrt{x-1})}. \text{ On factorise par } \sqrt{x-1} :$$

$$\text{Ainsi, } \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\sqrt{x-1}(\sqrt{x-1} - 1)}{(\sqrt{x-1})^2(1 + \sqrt{x-1})} = \frac{\sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x-1}(1 + \sqrt{x-1})}. \text{ On a } \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x-1} - 1) = -1,$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sqrt{x-1}) = 1, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x-1}(1 + \sqrt{x-1}) = 0^+; \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty.$$

Donc la fonction f n'est pas dérivable en 1 .

EXERCICE 3

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2, u_1 = 4$ et $u_{n+2} = \frac{u_n + u_{n+1}}{2}$.

1. a) A l'aide du tableur, voici les quatorze premiers termes de la suite (u_n) :

b) On conjecture que la limite de cette suite est $\frac{10}{3}$.

c) Si $u_0 = u_1 = c$, alors $u_2 = \frac{u_0 + u_1}{2} = c$ et la suite (u_n) est constante égale à c .

2. Dans le premier exemple, on obtient $l = \frac{10}{3}$, soit $2a + 4b = \frac{10}{3}$, et dans le deuxième

exemple, $ac + bc = c$, soit $a + b = 1$. On résout le système $\begin{cases} 2a + 4b = \frac{10}{3} \\ a + b = 1 \end{cases}$ et on trouve $\begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{2}{3} \end{cases}$.

Ainsi, on conjecture que $l = \frac{1}{3} u_0 + \frac{2}{3} u_1$.

3. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_{n+1} - u_n$.

a) Les quatorze premiers termes de la suite (v_n) ci-contre :

b) La suite (v_n) semble être géométrique de raison $-\frac{1}{2}$, donc convergente vers 0 et non monotone.

c) On démontre que la suite (v_n) est géométrique : Pour tout entier naturel n ,

$$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{u_n + u_{n+1}}{2} - u_{n+1} = \frac{u_n - u_{n+1}}{2} = \frac{-(u_{n+1} - u_n)}{2} = -\frac{1}{2} v_n.$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_1 - u_0$.

Ainsi, pour tout entier naturel n , $v_n = v_0 \left(-\frac{1}{2}\right)^n = (u_1 - u_0) \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

On peut alors écrire, pour tout entier naturel n non nul, $v_{n-1} = u_n - u_{n-1}$,

$$\text{soit } u_n = v_{n-1} + u_{n-1} = v_{n-1} + v_{n-2} + u_{n-2} = \dots = v_{n-1} + v_{n-2} + \dots + v_0 + u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} v_k + u_0,$$

$$\text{soit } u_n = (u_1 - u_0) \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} + u_0 = (u_1 - u_0) \frac{2}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) + u_0.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car la raison de la suite est strictement comprise entre -1 et 1 ,

alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = (u_1 - u_0) \frac{2}{3} + u_0 = \frac{1}{3} u_0 + \frac{2}{3} u_1$. On retrouve le résultat de la question 2.

n	u_n
0	2
1	4
2	3
3	3,5
4	3,25
5	3,3750000
6	3,3125000
7	3,3437500
8	3,3281250
9	3,3359375
10	3,3320313
11	3,3339844
12	3,3330078
13	3,3334961
14	3,3332520

n	v_n
0	2
1	-1
2	0,5
3	-0,25
4	0,125
5	-0,0625
6	0,03125
7	-0,015625
8	0,0078125
9	-0,0039063
10	0,0019531
11	-0,0009766
12	0,0004883
13	-0,0002441
14	-3,3332520