

Première méthode : 1. Le point M étant sur le demi-cercle supérieur, x prend ses valeurs dans $[-1 ; 1]$.

2. Soit H le milieu de $[MM']$; H a pour abscisse x ; $[AH]$ est la hauteur de AMM' issue de A. L'aire du triangle AMM' isocèle en A est $(AH \times MM') / 2$, soit $\frac{|1-x| \times 2\sqrt{1-x^2}}{2} = \frac{|1-x| \times 2\sqrt{1-x^2}}{2} = (1-x)\sqrt{1-x^2}$ car $x \in [-1 ; 1]$.

3. La fonction $A : x \mapsto (1-x)\sqrt{1-x^2}$ est dérivable comme produit et composée de fonctions dérivables sur $]-1 ; 1[$.

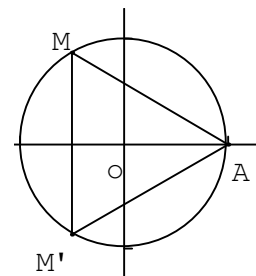
Sa dérivée est $A'(x) = -1 \sqrt{1-x^2} + (1-x) \times \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-(1-x^2) - x(1-x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2x^2 - x - 1}{\sqrt{1-x^2}}$. Le signe de cette dérivée

dépend de $2x^2 - x - 1$ sur l'intervalle $]-1 ; 1[$; on cherche le signe de cette quantité : $\Delta = (-1)^2 + 8 = 9$; il y a deux

racines : $\frac{1+\sqrt{9}}{4} = 1$ et $\frac{1-\sqrt{9}}{4} = -\frac{1}{2}$; la dérivée est négative sur $[-\frac{1}{2} ; 1[$ et positive sur $]-1 ; -\frac{1}{2}]$; donc la fonction A est croissante sur $]-1 ; -\frac{1}{2}]$ et décroissante sur $[-\frac{1}{2} ; 1[$. Cette fonction atteint son

maximum en $x = -\frac{1}{2}$ qui vaut $A(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{2} \times \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

4. Les points M et M' ont pour abscisse $-\frac{1}{2}$ et pour ordonnée respective $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Deuxième méthode : 1. Le point M étant sur le demi-cercle supérieur, α prend ses valeurs dans $[0 ; \pi]$. Les coordonnées de M sont $(\cos \alpha ; \sin \alpha)$.

3. L'aire du triangle AMM' est $(AH \times MM') / 2$, soit $((1 - \cos \alpha)2 \sin \alpha) / 2 = (1 - \cos \alpha) \sin \alpha$.

4. Cette fonction f est dérivable comme produit de fonctions dérivables et

$$f'(\alpha) = \sin \alpha \times \sin \alpha + (1 - \cos \alpha) \cos \alpha = \sin^2 \alpha - (1 - \cos \alpha) \cos \alpha = 1 - \cos^2 \alpha - (1 - \cos \alpha) \cos \alpha =$$

$$f'(\alpha) = (1 - \cos \alpha)(1 + 2\cos \alpha) = 2(1 - \cos \alpha)(\cos \alpha + \frac{1}{2}).$$

5. Etudions le signe de $f'(x) : \forall \alpha$ réel, $1 - \cos \alpha \geq 0$, et $\cos \alpha + \frac{1}{2} = 0$ pour $\alpha = 2\pi/3$ ou $-2\pi/3$. D'où :

α	0	$2\pi/3$	π
$1 - \cos \alpha$		+	+
$\cos \alpha + \frac{1}{2}$	+	0	-
$f'(x)$	+	0	-

Donc la fonction f est croissante sur $[0 ; 2\pi/3]$ et décroissante sur $[2\pi/3 ; \pi]$.

6. Le maximum de cette fonction est atteint lorsque $\alpha = 2\pi/3$; l'aire maximale est alors

$$(1 - \cos \frac{2\pi}{3}) \sin \frac{2\pi}{3} = (1 + \frac{1}{2}) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

7. Les coordonnées polaires de M sont $(1 ; \frac{2\pi}{3})$ et celles de M' sont $(1 ; -\frac{2\pi}{3})$.

8. On retrouve bien les valeurs de la première méthode.

DEVOIR MAISON N° 2

EXERCICE 1 : On considère la parabole P représentative de la fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a est un réel non nul ; la fonction g est définie par $g(x) = \frac{1}{f(x)}$, et C est sa courbe représentative.

a) Déterminer les limites des fonctions f et g en $+\infty$ et en $-\infty$ en fonction des valeurs de a .

b) Donner les tableaux de variations de la fonction g dans les six cas suivants en précisant les ensembles de définition de g : 1) $a > 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac > 0$; 2) $a > 0$ et $\Delta = 0$; 3) $a > 0$ et $\Delta < 0$; 4) $a < 0$ et $\Delta > 0$;

5) $a < 0$ et $\Delta = 0$; 6) $a < 0$ et $\Delta < 0$.

c) Préciser les asymptotes éventuelles à la courbe C.

EXERCICE 2 : On considère la fonction h définie par $h(x) = \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$.

a) Montrer que la fonction h est définie sur $[-1 ; 0[\cup]0 ; 1]$.

b) Montrer que h peut s'écrire sous l'une des deux formes suivantes : $\frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x}$ ou $\frac{x}{1 - \sqrt{1-x^2}}$.

c) Déterminer les limites de cette fonction aux bornes de son ensemble de définition.