CORRECTION DEVOIR SURVEILLE N° 2 **www.brainprepa.com**

EXERCICE 1 :

1. a) La fonction g est dérivable comme somme de fonctions dérivables ; $g'(x) = tan^2(x) + 1 - 1 = tan^2(x)$ est positif ; donc la fonction g est croissante sur I et comme $g(0) = 0$, la fonction g est positive sur I.

b) Pour tout x de I, on a $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq cos(x) \leq 1$ donc $1 \leq \frac{1}{cos(x)} \leq \sqrt{2}$ et $0 \leq sin(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $0 \leq tan(x) \leq 1$.

c) La fonction h est dérivable comme somme de fonctions dérivables ; $h'(x) = tan^2(x) + 1 - 2 = tan^2(x) - 1$; d'après la question précédente, $h'(x)$ est négative et donc h est décroissante sur I ; de plus, $h(0) = 0$, donc h est négative sur I.

2. a) La fonction f est dérivable comme somme de fonctions dérivables ; $f'(x) = tan^2(x) + 1 - 1 - 4x^2 = tan^2(x) - 4x^2$; donc $f'(x) = (tan(x) + 2x)(tan(x) - 2x)$; d'après les questions précédentes, $tan(x) - 2x \leq 0$ et $tan(x) + 2x \geq 0$ donc $f'(x)$ est négative et donc f est décroissante sur I ; de plus, $f(0) = 0$, donc f est négative sur I.

b) Le tableau de variations de f : (Le signe de f sur I : $f(x) \leq 0$)

x	0 $\qquad\qquad$ $\pi/4$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$0 \searrow f(\pi/4)$

c) Pour tout x de I, on a $g(x) \geq 0$ et $f(x) \leq 0$, donc $x \leq tan(x) \leq x + \frac{4x^3}{3}$.

3. Pour tout x de I, on a $0 \leq tan(x) - x \leq \frac{4x^3}{3}$ et si $x \neq 0$, $0 \leq \frac{tan(x) - x}{x^2} \leq \frac{4x}{3}$. Comme $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{4x}{3} = 0$ alors $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{tan\,x - x}{x^2} = 0$. La fonction tangente est dérivable sur I, donc $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \left(\frac{tan\,x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} \right)$ est le nombre dérivé de $tan(x)$ en $\frac{\pi}{4}$, car $tan(\frac{\pi}{4}) = 1$; donc $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \left(\frac{tan\,x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} \right) = tan'\left(\frac{\pi}{4}\right) = tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + 1 = 2$.

EXERCICE 2 : a) On a $u_1 = \frac{u_0 + 2v_0}{3} = \frac{14}{3}$, $v_1 = \frac{u_0 + 3v_0}{4} = \frac{15}{4}$, $u_2 = \frac{73}{18}$, $v_2 = \frac{191}{48}$.

b) Pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{4(u_n + 2v_n) - 3(u_n + 3v_n)}{12} = \frac{u_n - v_n}{12} = \frac{1}{12} w_n$. Donc la suite (w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{12}$ et de premier terme $w_0 = 11$. Ainsi $w_n = 11\left(\frac{1}{12}\right)^n$. Pour tout entier n, $w_n > 0$.

c) On a $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 2v_n - 3u_n}{3} = \frac{-w_n}{3} < 0$, donc la suite (u_n) est décroissante ; et $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3v_n - 4v_n}{4} = \frac{w_n}{4} > 0$, donc la suite (v_n) est croissante. De plus $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \lim\limits_{n \to +\infty}(u_n - v_n) = 0$ car la raison de la suite (w_n) est strictement compris entre -1 et 1. Donc les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

d) Pour tout n, $t_{n+1} = 3u_{n+1} + 8v_{n+1} = u_n + 2v_n + 2(u_n + 3v_n) = t_n$. Donc la suite (t_n) est constante et $t_n = t_0 = 36 + 8 = 44$.

On trouve que $u_n = 4 + 8\left(\frac{1}{12}\right)^n$ et que $v_n = 4 - 3\left(\frac{1}{12}\right)^n$. La limite commune de (u_n) et (v_n) est 4 .

EXERCICE 3 : a) L'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$ a pour discriminant : $\Delta = -12$; donc l'équation a deux solutions complexes : $z_1 = \frac{2 + i\sqrt{12}}{2} = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = \overline{z_1} = 1 - i\sqrt{3}$; L'équation $z^2 + (2\sqrt{2})z + 4 = 0$ a pour discriminant : $\Delta = -8$; donc l'équation a deux solutions complexes : $z_3 = {(-2\sqrt{2} + i\sqrt{8})}/{2} = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $z_4 = \overline{z_3} = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

b) Le quadrilatère ABCD est un trapèze isocèle.

c) $|z_A| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ et $|z_B| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2$. Comme $z_C = \overline{z_A}$ et $z_D = \overline{z_B}$, alors $|z_c| = |z_D| = 2$.

Soit θ_A un argument de z_A ; on a $cos(\theta_A) = 1/2$ et $sin(\theta_A) = \sqrt{3}/2$, donc $\theta_A = \pi/3$ [2π], et Arg(z_C) = $-\pi/3$ [2π].

Soit θ_B un argument de z_B ; on a $cos(\theta_B) = -\sqrt{2}/2$, $sin(\theta_B) = \sqrt{2}/2$, donc $\theta_B = 3\pi/4$ [2π], Arg(z_D) = $-3\pi/4$ [2π].

d) On a $\frac{z_B}{z_A} = \frac{\sqrt{2}(-1 + i)}{1 + i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$. De plus, $\left|\frac{z_B}{z_A}\right| = \frac{|z_B|}{|z_A|} = 1$ et $Arg(\frac{z_B}{z_A}) = Arg(z_B) - Arg(z_A) = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{12}$, donc $cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$. Les points A, B, C, D sont sur le cercle de centre O et de rayon 2.