DEVOIR SURVEILLE N° 2 BRAIN-PREPA (www.brainprepa.com)

EXERCICE 1 (10 points)

1. On considère la fonction g définie sur l'intervalle I = $[\ 0\ ;\ \frac{\pi}{4}\ ]$ par $g(x) = tan(x) - x$.

a) Etudier les variations de la fonction g et en déduire son signe.
b) Montrer que, pour tout x de I, on a $0 \leq tan(\ x\ ) \leq 1$.
c) On considère la fonction h définie sur I par $h(x) = tan(x) - 2x$. Montrer que la dérivée de h peut s'écrire $h'(\ x\ ) = tan^2(\ x\ ) - 1$. Etudier les variations de h et en déduire son signe .

2. On considère la fonction f définie sur I par $f(x) = tan(\ x\ ) - x - \frac{4x^3}{3}$.

a) Montrer que la dérivée de f peut s'écrire $f\ '(\ x\ ) = (tan(\ x\ ) + 2x\ )(tan(\ x\ ) - 2x\ )$. En déduire le signe de $f\ '$.
b) Dresser le tableau de variations de la fonction f et en déduire son signe.
c) Montrer que, pour tout x de I, on a $x \leq tan(\ x\ ) \leq x + \frac{4x^3}{3}$.

3. Calculer les deux limites suivantes : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{tan\, x - x}{x^2}$ et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \left(\frac{tan\, x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} \right)$.

EXERCICE 2 (5 points)

On considère les deux suites $(\ u_n\ )$ et $(\ v_n\ )$ définie par $u_0 = 12$ et $u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$; $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$.

a) Déterminer u_1 , v_1 , u_2 , v_2 .
b) On pose, pour tout entier naturel n, $w_n = u_n - v_n$. Montrer que la suite $(\ w_n\ )$ est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme. Ecrire w_n en fonction de n .
c) Déterminer alors les variations des suites $(\ u_n\ )$ et $(\ v_n\ )$. En déduire que ces deux suites sont adjacentes.
d) On pose, pour tout entier naturel n, $t_n = 3u_n + 8v_n$. Montrer que la suite $(\ t_n\ )$ est constante. En déduire une expression des suites $(\ u_n\ )$ et $(\ v_n\ )$ en fonction de n et déterminer leur limite.

EXERCICE 3 (5 points)

a) Résoudre dans l'ensemble £ des nombres complexes les équations suivantes :
$z^2 - 2z + 4 = 0$; $z^2 + (\ 2\sqrt{2}\ )z + 4 = 0$.
b) On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm , les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 1 + i\sqrt{3}$, $z_B = \sqrt{2}(-1 + i\ )$, $z_C = \sqrt{2}(-1 - i\ )$, $z_D = 1 - i\sqrt{3}$.
Placer les points A, B, C et D et préciser la nature du quadrilatère ABCD.
c) Déterminer le module et un argument des nombres complexes z_A et z_B . En déduire ceux de z_C et de z_D .
d) Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $\frac{z_B}{z_A}$. En déduire la valeur exacte de $cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Question subsidiaire : Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.