

**DEVOIR SURVEILLE N° 6**

---

**EXERCICE 1** 6 points

Une boîte contient 4 boules vertes et  $n$  boules blanches. Un jeu consiste à miser un euro puis à tirer simultanément deux boules de la boîte. Si les deux boules sont de la même couleur, le joueur gagne 5 euro; si elles sont de couleurs différentes, le joueur perd sa mise. Les tirages sont équiprobables.

1. Dans cette question, on suppose  $n = 6$ .

Calculer les probabilités d'obtenir: a) Deux boules de la même couleur. b) Deux boules de couleurs différentes.

2. Dans cette question l'entier  $n$  est quelconque supérieur ou égal à 2, et on note  $X$  la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux boules, associe le gain algébrique du joueur.

- Exprimer en fonction de  $n$  la loi de probabilité de  $X$ .
- Déterminer l'espérance mathématique de  $X$  en fonction de  $n$ .
- Pour quelles valeurs de  $n$  a-t-on  $E(X) = 0$  ?

**EXERCICE 2** Extrait de Amérique du Sud 2007 5 points

1. On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0 ; +\infty[$  par  $f(x) = 2x - 2 + \ln(x^2 + 1)$ .

- Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
- Étudier les variations de  $f$ .
- Dresser le tableau de variations de  $f$ .
- Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $[0 ; +\infty[$
- Justifier que  $0 < \alpha < 1$ .

**EXERCICE 3** Extrait de Polynésie septembre 2007 9 points

On désigne par (E) l'ensemble des fonctions  $f$  continues sur l'intervalle  $[0 ; 1]$  et vérifiant les conditions (P1), (P2) et (P3) suivantes :

- (P1) :  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[0 ; 1]$ .
- (P2) :  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 1$ .
- (P3) : pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0 ; 1]$ ,  $f(x) \leq x$ .

À toute fonction  $f$  de (E), on associe le nombre réel  $I_f = \int_0^1 [x - f(x)] dx$ .

1. Montrer que, pour toute fonction  $f$  de (E),  $I_f \geq 0$ .

2. Soit  $h$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0 ; 1]$  par  $h(x) = 2^x - 1$ . (On rappelle que, pour tout  $x$  réel,  $2^x = e^{x \ln 2}$ ).

- Montrer que la fonction  $h$  vérifie les conditions (P1) et (P2).
- Soit  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0 ; 1]$  par  $g(x) = 2^x - x - 1$ .

Montrer que, pour tout  $x$  de  $[0 ; 1]$ ,  $g(x) \leq 0$ . (On pourra étudier le sens de variation de la fonction  $g$  sur  $[0 ; 1]$ ).

c) En déduire que la fonction  $h$  appartient à l'ensemble (E).

d) Montrer que le réel  $I_h$  associé à la fonction  $h$  est égal à  $\frac{3}{2} - \frac{1}{\ln 2}$ .

3. Soit  $P$  une fonction définie sur l'intervalle  $[0 ; 1]$  par  $P(x) = ax^2 + bx + c$  où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont trois nombres réels tels que  $0 < a < 1$ . On se propose de déterminer les valeurs des réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  pour que la fonction  $P$  appartienne à l'ensemble (E) et que  $I_P = I_h$ .

a) Montrer que la fonction  $P$  vérifie la propriété (P2) si et seulement si, pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0 ; 1]$ ,  $P(x) = ax^2 + (1 - a)x$ .

Montrer que toute fonction  $P$  définie sur  $[0 ; 1]$  par  $P(x) = ax^2 + (1 - a)x$  avec  $0 < a < 1$  appartient à (E).

- Exprimer en fonction de  $a$  le réel  $I_P$  associé à la fonction  $P$ .
- Montrer qu'il existe une valeur du réel  $a$  pour laquelle  $I_P = I_h$ . Quelle est cette valeur ?