

## CORRECTION DEVOIR BRAIN-PREPA

### EXERCICE 1

1. a) La fonction  $G$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme somme et composée de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

$$G'(x) = F'(x) - F'(-x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+(-x)^2} = 0 ; \text{ donc la fonction } G \text{ est constante } = G(0).$$

b)  $G(0) = F(0) + F(0) = 0$ . Donc pour tout réel  $x$ ,  $G(x) = 0$ , donc  $F(x) = -F(-x)$  donc  $F$  est une fonction impaire.

2. a)  $H$  est dérivable sur  $I$  comme somme et composée de fonctions dérivables sur  $I$ .

$$H'(x) = F'(x) - \frac{1}{x^2} F'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} = 0 \text{ pour tout réel } x \text{ dans } I. \text{ Donc la fonction } H \text{ est constante sur } I.$$

b) On a  $H(1) = F(1) + F(1)$ , donc pour tout  $x$  dans  $I$ ,  $H(x) = 2F(1)$ .

c) On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x) = 2F(1)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F\left(\frac{1}{x}\right) = F(0) = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} H(x) = 2F(1)$ .

d) On en déduit que la droite d'équation  $y = 2F(1)$  est asymptote horizontale à la courbe  $(C)$ .

3. a)  $T'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} F'(\tan(x)) - 1 = \frac{1}{\cos^2(x)} \frac{1}{1+\tan^2(x)} - 1 = 0$ ; donc la fonction  $T$  est constante sur  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ ; de

plus,  $T(0) = F(\tan(0)) - 0 = 0$ ; donc pour tout réel  $x$  dans  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ ,  $T(x) = 0$ .

b) On a  $T\left(\frac{\pi}{4}\right) = F\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) - \frac{\pi}{4} = F(1) - \frac{\pi}{4}$ ; d'où  $F(1) = \frac{\pi}{4}$ .

4. Ci-contre le tableau de variations de  $F$  sur  $\mathbb{R}$ :

5. Equations des tangentes aux points d'abscisses  $-1, 0, 1$ :

$$T_{-1}: y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}; \quad T_0: y = x; \quad T_1: y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

|         |                  |     |                 |
|---------|------------------|-----|-----------------|
| $x$     | $-\infty$        | $0$ | $+\infty$       |
| $F'(x)$ | +                |     |                 |
| $F(x)$  | $-\frac{\pi}{2}$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ |

### EXERCICE 2

A. 1. On a  $g'(x) = 6x^2 + 2x + \frac{1}{x} = \frac{6x^3 + 2x^2 + 1}{x}$  qui est

strictement positif sur  $I$ ; donc la fonction  $g$  est strictement croissante sur  $I$ . On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$ .

2. La fonction  $g$  est continue (puisque dérivable) et est strictement croissante de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ ; donc le nombre  $0$  a un unique antécédent dans  $I$  par  $g$  c'est-à-dire que l'équation  $g(x) = 0$  a une solution unique  $\alpha$ ; avec la calculatrice, on trouve  $g(0,5) \approx -0,1931$  et  $g(0,6) \approx 0,281$  donc  $0,5 < \alpha < 0,6$  et  $g(0,54) \approx -0,0097$  et  $g(0,55) \approx 0,0374$  donc  $0,54 < \alpha < 0,55$ .

B. 1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\ln(x)}{x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+\ln(x)}{x} = -\infty$ .

$$2. a) f'(x) = 2x + 1 - \frac{1 - (1 + \ln(x))}{x^2} = \frac{2x^3 + x^2 - \ln(x)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}.$$

b) Comme la fonction  $g$  est strictement croissante sur  $I$  et s'annule en  $\alpha$ , on obtient le signe de  $g(x)$  dans le tableau de variations de  $f$ :

$$3. a) f(x) - h(x) = -\frac{1+\ln(x)}{x} \text{ et}$$

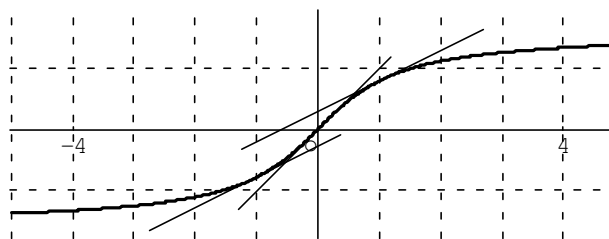
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\ln(x)}{x} = 0$$

b) Les positions relatives de  $C$  et  $\Gamma$  sont données par le signe de

$$f(x) - h(x) = -\frac{1+\ln(x)}{x}. \text{ On a } 1 + \ln(x) = 0 \text{ pour } x = \frac{1}{e}, \text{ et donc :}$$

si  $0 < x < \frac{1}{e}$ ,  $f(x) > h(x)$  et  $C$  est au-dessus de  $\Gamma$ ;

si  $x > \frac{1}{e}$ ,  $f(x) < h(x)$  et  $C$  est au-dessous de  $\Gamma$ .



|         |              |             |           |
|---------|--------------|-------------|-----------|
| $x$     | $0$          | $\alpha$    | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $  $         | $0$         | $+$       |
| $f(x)$  | $   +\infty$ | $f(\alpha)$ | $+\infty$ |

