DEVOIR BRAIN-PREPA

EXERCICE 1

F est une fonction définie et dérivable sur IR telle que F(0) = 0 et pour tout réel x, $F'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. On admet que cette fonction existe et on ne cherchera pas à donner une expression de F(x). (C) est la courbe représentative de F dans un repère orthonormal.

1. G est la fonction définie sur IR par $G(x) = F(x) + F(-x)$.

a) Justifier que G est dérivable sur IR et calculer G'(x) pour tout réel x.

b) Calculer G(0) et déduisez-en que F est une fonction impaire.

2. H est la fonction définie sur I =]0 ; +∞[par $H(x) = F(x) + F(\frac{1}{x})$.

a) Justifier que H est dérivable sur I et calculer H'(x) pour tout réel x dans I.

b) Démontrer que pour tout x dans I, H(x) = 2F(1).

c) Déduisez-en que la limite de la fonction F en +∞ est 2F(1).

d) Qu'en déduisez-vous pour la courbe (C) ?

3. T est la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ par $T(x) = F(\tan(x)) - x$.

a) Calculer T'(x).

Qu'en déduisez-vous pour la fonction T ?

b) Calculer F(1).

4. Dresser le tableau de variations de F sur IR.

5. Tracer la courbe (C), ses asymptotes et ses tangentes aux points d'abscisses -1, 0, 1.

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie sur I =]0 ; +∞[par $f(x) = x^2 + x - \dfrac{1+\ln(x)}{x}$ et C est la courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ (Unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées).

A . Etude d'une fonction auxiliaire :

g est la fonction définie sur I par $g(x) = 2x^3 + x^2 + \ln(x)$.

1. Etudier les variations de g sur I.

2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique α et trouver l'entier p tel que $p\times10^{-2} \le \alpha \le (p+1)\times10^{-2}$.

B. Etude de la fonction f :

1. Déterminer les limites de f aux bornes de I.

2. a) Vérifier que pour tout réel x dans I : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

b) Etudier les variations de f sur I et dresser son tableau de variations.

3. On note h la fonction définie sur I par $h(x) = x^2 + x$ et Γ sa courbe représentative dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

a) Quelle est la limite en +∞ de $f(x) - h(x)$?

b) Etudier les positions relatives de C et Γ .

c) Tracer Γ, puis C.