CORRECTION DE L'EVALUATION **BRAIN-PREPA**

EXERCICE 1 : PARTIE A : a) Les solutions de l'équation différentielle (E2) définie par $y'-2y=0$ sont les fonctions v définies par $v(x)=Ce^{2x}$ où C est une constante réelle.

b) On a $u'(x)=-3e^{x}+2$ et $u'(x)-2u(x)=-3e^{x}+2-2(-3e^{x}+2x)=3e^{x}-4x+2$ et donc u est solution de (E1).

c) Une fonction v est solution de (E2) si et seulement si $v'(x)-2v(x)=0$, équivalent à $v'(x)-2v(x)+u'(x)-2u(x)=3e^{x}-4x+2$, équivalent à $u+v$ est solution de (E1).

d) Donc toutes les solutions de (E1) sont les fonctions $f=u+v$, définies par $f(x)=Ce^{2x}-3e^{x}+2x$.

e) La solution f de (E1) telle que la courbe représentative de f admette une tangente horizontale au point d'abscisse 0 vérifie $f'(0)=0$, d'où $f'(x)=2Ce^{2x}-3e^{x}+2$ et $f'(0)=2Ce^{0}-3e^{0}+2=2C-1=0$, d'où $C=½$.

PARTIE B : a) On a $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{2x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}2x=-\infty$. On a $g(x)=e^{x}(\frac{1}{2}e^{x}-3)+2x$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}2x=+\infty$.

b) On a $\lim\limits_{x\to-\infty}(g(x)-2x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(\frac{1}{2}e^{2x}-3e^{x})=0$ donc la droite (d) d'équation $y=2x$ est asymptote à la courbe C_g en $-\infty$ (Cette droite n'est pas asymptote à la courbe en $+\infty$). Pour préciser la position relative de (d) et C_g , il suffit d'étudier le signe de $(g(x)-2x)=\frac{1}{2}e^{2x}-3e^{x}=e^{x}(\frac{1}{2}e^{x}-3)$; pour tout réel x, $e^{x}>0$; $\frac{1}{2}e^{x}-3>0$ si $e^{x}>6$ soit $x>ln6$. Donc , sur] $-\infty$; ln6[, (d) est au-dessus de C_g et sur] ln6 ; $+\infty$ [, (d) est au-dessous de C_g .

c) On a $g'(x)=e^{2x}-3e^{x}+2$; en posant $X=e^{x}$, on obtient $e^{2x}-3e^{x}+2=X^{2}-3X+2$. Ce polynôme a deux racines : 1 et 2, ce qui donne les solutions de $g'(x)=0$: 0 et e^{2}. D'où le tableau de variations de g :

d) Comme sur l'intervalle [0 ; ln2], (d) est au-dessus de C_g , l'aire comprise entre C_g , (d) et les droites d'équation $x=0$ et $x=\ln 2$ est définie par $\int_0^{ln2}(2x-g(x))dx=\int_0^{ln2}(-\frac{1}{2}e^{2x}+3e^{x})dx=\left[-\frac{1}{4}e^{2x}+3e^{x}\right]_0^{ln2}=-\frac{1}{4}\times4+3\times2+\frac{1}{4}-3=\frac{9}{4}$.

EXERCICE 2 : a) On a $f'(x)=\dfrac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ donc f est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; ainsi $u_0=f(1)-f(0)=ln(1+\sqrt{2})$. b) On a $u_1=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1=\sqrt{2}-1$.

c) Pour tout entier $n\geq1$ et pour tout x de [0 ; 1], $0\leq x\leq1$ et en multipliant les termes par la quantité positive x^n, on obtient $0\leq x^{n+1}\leq x^n$; en utilisant la propriété : si, sur $[a, b]$ on a $f(x) < g(x)$ alors $\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$;on obtient $0\leq\frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x^2}}\leq\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\int_0^1\frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x^2}}dx\leq\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$ soit $u_{n+1}\leq u_n$ et la suite (u_n) est décroissante.

d) Pour tout x de [0 ; 1], on a $0\leq x\leq1$ implique $0\leq x^2\leq1$ d'où $1\leq x^2+1\leq2$, d'où (par la croissance de la fonction racine carrée) $1\leq\sqrt{1+x^2}\leq\sqrt{2}$.

e) On a donc $\frac{1}{\sqrt{2}}\leq\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\leq1$; pour tout x de [0 ; 1] et tout entier $n\geq1$, $\frac{x^n}{\sqrt{2}}\leq\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\leq x^n$, d'où $\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{2}}dx\leq\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx\leq\int_0^1x^ndx$, d'où $\left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)\sqrt{2}}\right]_0^1\leq u_n\leq\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$, d'où $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}}\leq u_n\leq\frac{1}{n+1}$.

f) En utilisant le théorème des gendarmes et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$, on obtient que (u_n) converge vers 0.

EXERCICE 3 : L'aire comprise entre les droites d'équation $x=-1$ et $x=1$ et les deux courbes est donnée par $\int_{-1}^1|f(x)-g(x)|dx=\int_{-1}^0(f(x)-g(x))dx+\int_0^1(g(x)-f(x))dx$; par intégration par parties, on a $\int_a^b f(x)dx=\left[(x+1)(-e^{-x})-x\right]_a^b-\int_a^b(-e^{-x})dx=\left[(x+2)(-e^{-x})-x\right]_a^b$; d'où l'aire $=\left[(x+2)(-e^{-x})-x-\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-1}^0+\left[\frac{x^3}{3}+x^2-(x+2)(-e^{-x})+x\right]_0^1=(-2+e^1-1-\frac{1}{3}+1)+(\frac{1}{3}+1+3e^{-1}+1-2)=\frac{3}{e}+e-2$.