

**EXERCICE 1 ( 9 points )**

**PARTIE A :** On considère l'équation différentielle (E1) définie par  $y' - 2y = 3e^x - 4x + 2$ .

- Résoudre l'équation différentielle (E2) définie par  $y' - 2y = 0$ .
- Montrer que la fonction  $u$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $u(x) = -3e^x + 2x$  est solution de (E1).
- Montrer qu'une fonction  $v$  est solution de (E2) si et seulement si  $u + v$  est solution de (E1).
- En déduire toutes les solutions de (E1).
- Déterminer la solution  $f$  de (E1) telle que la courbe représentative de  $f$  admette une tangente horizontale au point d'abscisse 0.

**PARTIE B :** On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 3e^x + 2x$  et  $C_g$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

- Déterminer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
- Montrer que la droite (d) d'équation  $y = 2x$  est asymptote à la courbe  $C_g$ . Préciser la position relative de (d) et  $C_g$ .
- Etudier les variations de la fonction  $f$ . Dresser son tableau de variations.
- Calculer l'aire comprise entre  $C_g$ , (d) et les droites d'équation  $x = 0$  et  $x = \ln 2$ .

**EXERCICE 2 ( 7 points )**

On considère la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$  et pour  $n \geq 1$ ,  $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx$ .

- Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; 1]$  par  $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ . Calculer  $f'(x)$  et en déduire  $u_0$ .
- Calculer  $u_1$ .
- Pour tout entier  $n \geq 1$  et pour tout  $x$  de  $[0; 1]$ , comparer  $x^n$  et  $x^{n+1}$ . En déduire que la suite  $(u_n)$  est décroissante.
- Démontrer que, pour tout  $x$  de  $[0; 1]$ ,  $1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$ .
- En déduire que, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$ .
- En déduire que  $(u_n)$  converge et déterminer sa limite.

**EXERCICE 3 ( 4 points )**

Déterminer l'aire comprise sur la figure ci-contre entre les droites d'équation  $x = -1$  et  $x = 1$  et les deux courbes sachant que les deux courbes sont les représentations graphiques des fonctions  $f$  et  $g$  définies par  $f(x) = (x+1)e^{-x} - 1$  et  $g(x) = x^2 + 2x$ .

