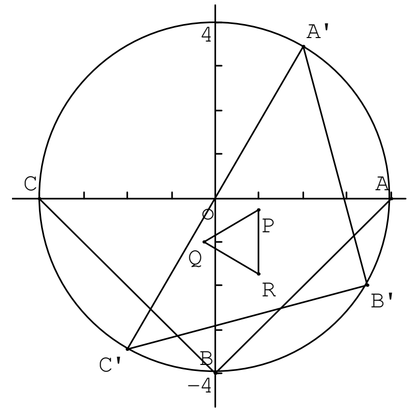
EXERCICE 1 :



a) On a $a - b = 4 - (-4i) = 4 + 4i$; et $-i(c - b) = -i(-4 + 4i) = 4 + 4i$.

b) D'où $c-b = e^{-i\frac{\pi}{2}}(a-b)$; ainsi, le point C est l'image de A dans la rotation de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$. Donc, le triangle ABC est rectangle et isocèle en B.

c) La transformation du plan associée est la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

d) On a $a' = e^{i\frac{\pi}{3}}a = (\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2})4 = 2+2i\sqrt{3}$;

$b' = e^{i\frac{\pi}{3}}b = (\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2})(-4i) = 2\sqrt{3}-2i$;

$c' = e^{i\frac{\pi}{3}}c = (\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2})(-4) = -2-2i\sqrt{3}$.

e) On a $p = \dfrac{a'+b}{2} = 1+i(\sqrt{3}-2)$; $q = \dfrac{b'+c}{2} = \sqrt{3}-2-i$; $r = \dfrac{c'+a}{2} = 1-i\sqrt{3}$.

f) On a $r-p = 2i(1-\sqrt{3})$ et $e^{i\frac{\pi}{3}}(q-p) = (\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2})(\sqrt{3}-2-i-1-i(\sqrt{3}-2)) = 2i(1-\sqrt{3})$. D'où l'égalité demandée.

g) D'après la question précédente, le point R est l'image de Q dans la rotation de centre P et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$; donc PR = PQ et $(\overrightarrow{PQ};\overrightarrow{PR}) = \dfrac{\pi}{3}$; donc le triangle PQR est équilatéral.

EXERCICE 2 : b) On utilise la formule des probabilités totales puisque les événements P, M, G forment une partition de l'univers. On a $p(E) = p(P\cap E) + p(M\cap E) + p(G\cap E) = 0{,}13 \times 0{,}035 + 0{,}54 \times 0{,}06 + 0{,}33 \times 0{,}045 = 0{,}0518$.

c) La probabilité qu'une huître soit moyenne sachant qu'elle a été mal triée est la probabilité conditionnelle

$p_E(M) = \dfrac{p(M\cap E)}{p(E)} = \dfrac{0{,}54\times 0{,}06}{0{,}0518} = 0{,}625$.

EXERCICE 3 : 1. Un encadrement de *f(x)* sur [0 ; 1] est $x^2 - \dfrac{x^3}{2} \le x\ln(x+1) \le x^2 - \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^4}{3}$; d'où

$\int_0^1 (x^2 - \dfrac{x^3}{2})dx \le \int_0^1 f(x)dx \le \int_0^1 (x^2 - \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^4}{3})dx$; on a $\int_0^1 (x^2 - \dfrac{x^3}{2})dx = \left[\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{8}\right]_0^1 = \dfrac{5}{24}$ et

$\int_0^1 (x^2 - \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^4}{3})dx = \left[\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{8} + \dfrac{x^5}{15}\right]_0^1 = \dfrac{11}{40}$; d'où $\dfrac{5}{24} \le \int_0^1 f(x)dx \le \dfrac{11}{40}$.

2. a) G est une primitive de la fonction g sur]0 ; +∞ [si G est dérivable sur]0 ; +∞ [et si $G'(x) = g(x)$. G est bien dérivable sur]0 ; +∞ [et $G'(x) = \ln(x + 1) + (x + 1)/(x + 1) - \ln(x) - x/x = \ln(x + 1) - \ln(x) = \ln(\dfrac{x+1}{x}) = \ln(1+\dfrac{1}{x}) = g(x)$.

b) D'où $\int_1^2 g(x)dx = G(2) - G(1) = 3\ln 3 - 4\ln 2 = \ln(\dfrac{27}{16})$.

EXERCICE 4 : a) On a $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2} = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{2x}{1+x^2}$, d'où une primitive de f : $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

Ainsi $I_1 = \int_0^1 f(x)dx = F(1) - F(0) = \dfrac{1}{2}\ln 2$.

b) On a $f(x) + g(x) = \dfrac{x}{1+x^2} + \dfrac{x^3}{1+x^2} = \dfrac{x(1+x^2)}{1+x^2} = x$.

Donc $I_1 + I_2 = \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 (f(x)+g(x))dx = \int_0^1 x dx = \left[\dfrac{x^2}{2}\right]_0^1 = \dfrac{1}{2}$.

D'où $I_2 = \dfrac{1}{2} - I_1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\ln 2 = \dfrac{1}{2}\ln(\dfrac{e}{2}) = \ln\sqrt{\dfrac{e}{2}}$.