DEVOIR MAISON N° 11

EXERCICE 1 : On considère la fonction numérique f définie sur $]-\infty ; 1[$ par $f(x) = \dfrac{2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}}$.

On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm).

1. a) Soit $X = \dfrac{2}{x-1}$. Prouver l'égalité $\dfrac{2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}} = \dfrac{e}{2} X^2 e^X$. En déduire la limite de f en 1.

b) Déterminer la limite de f en $-\infty$. c) Préciser les asymptotes à C. d) Etudier les variations de f sur $]-\infty ; 1[$. e) Représenter C.

2. a) Déterminer une primitive de f sur $]-\infty ; 1[$.

b) Soit α un réel dans $]0 ; 1[$. Déterminer $g(\alpha) = \int_0^\alpha f(x)dx$. Représenter $g(1/2)$ sur le graphique de la question 1.e).

c) Déterminer la limite de $g(\alpha)$ lorsque α tend vers 1.

3. a) Démontrer que l'équation $f(x) = ½$ a deux solutions dont l'une est -1 ; on note β l'autre solution.

b) Donner un encadrement de largeur 10^{-2} de β.

EXERCICE 2 : Soit a un réel strictement positif et f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x+a}{3} - x^{\frac{2}{3}} a^{\frac{1}{3}}$.

1. Etudier les variations de la fonction f sur $]0 ; +\infty[$. En déduire le signe de $f(x)$ pour $x > 0$.
Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

2. Soient b et c deux nombres réels strictement positifs.

a) Déduire de la question 1 que $\dfrac{a+b+c}{3} \geq \left(\dfrac{b+c}{2}\right)^{\frac{2}{3}} a^{\frac{1}{3}}$ et que l'égalité n'a lieu que pour $a = \dfrac{b+c}{2}$.

b) Montrer que $\left(\dfrac{b+c}{2}\right)^2 \geq bc$ et que l'égalité n'a lieu que si $b = c$.

3. Déduire des questions précédentes que, pour tous réels a, b, c strictement positifs, on a $\dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$.