

DEVOIR MAISON N° 7

EXERCICE 1

On admet le théorème suivant:

Soit a et b deux réels tels que $a < b$, et f une fonction dérivable sur $[a; b]$ telle que f' est continue sur $[a; b]$. On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. La longueur L , en unité de longueur, de l'arc de

courbe défini par la courbe C entre les points $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$ est égale à $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$.

La chaînette est la courbe obtenue lorsqu'on suspend une chaîne entre deux points A et B . Cette courbe a une équation de la forme $y = f(x)$ où f est la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Calculer la longueur de la chaînette entre les points d'abscisses -1 et 1 .

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie sur $[2; +\infty[$ par $f(x) = \frac{4x^2 + 13x - 9}{x^3 + 2x^2 - 3x}$.

1. Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+3}$.

2. Calculer alors $I = \int_2^3 f(t) dt$.

EXERCICE 3

On considère la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

1. Pour $a \geq 1$, déterminer $I(a) = \int_1^a f(t) dt$ en fonction de a .

2. Déterminer $\lim_{a \rightarrow +\infty} I(a)$. Interpréter graphiquement ce dernier résultat.

EXERCICE 4

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (1 - x^2) e^{-x}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Étudier les variations de f .

2. A l'aide de deux intégrations par parties successives, déterminer $A = \int_0^1 f(t) dt$. Interpréter graphiquement A .

3. Pour tout réel x de $[1; +\infty[$, on pose $F(x) = \int_1^x f(t) dt$.

a) Montrer que F est dérivable sur $[1; +\infty[$.

b) Déterminer l'expression de $F(x)$ et calculer la limite de F en $+\infty$.

c) Interpréter graphiquement ce dernier résultat.

4. On veut résoudre l'équation $F(x) = -A$.

a) Montrer que cette équation est équivalente à $2\ln(1+x) = x$.

b) Étudier le sens de variations de la fonction h définie sur $[1; +\infty[$ par $h(x) = 2\ln(1+x) - x$.

c) Démontrer que, sur l'intervalle $[1; +\infty[$, l'équation $2\ln(1+x) = x$ a une unique solution α .

d) Donner un encadrement de α à 10^{-3} près.

e) Déterminer $f(\alpha)$ sous la forme d'une fonction rationnelle de α , puis une valeur approchée à 10^{-3} près.