

CORRECTION DEVOIR MAISON N° 10

EXERCICE 1 : 1. Considérons la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = e^x - (x + 1)$. Cette fonction est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables. $f'(x) = e^x - 1$ qui s'annule en $x = 0$ et est positif sur $[0; +\infty[$; donc la fonction f est croissante sur $[0; +\infty[$ et son minimum est $f(0) = 0$, donc elle est positive sur $[0; +\infty[$; ainsi $e^x \leq x + 1$, et comme $x + 1 > 0$, en divisant par $x + 1$, on obtient $\frac{e^x}{x+1} \geq 1$.

2. Pour x positif, la fonction f est la primitive de la fonction qui à t associe $\frac{e^t}{t+1}$, qui s'annule en $x = 1$; donc la fonction f est dérivable et $f'(x) = \frac{e^x}{x+1}$. La fonction étant dérivable, elle est continue sur $[0; +\infty[= \mathbf{R}^+$.

3. $f(2) = \int_1^2 \frac{e^t}{t+1} dt \geq \int_1^2 1 dt = [t]_1^2 = 1$, en utilisant les propriétés de l'intégrale et la question 1.

4. On a $f(1) = \int_1^1 \frac{e^t}{t+1} dt = 0$; la fonction f est continue de $[1; 2]$ dans $[f(1); f(2)] = [0; f(2)]$ avec $f(2) \geq 1$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout k dans $[0; f(2)]$ il existe un réel c de $[1; 2]$ tel que $f(c) = k$; or $1 \in [0; f(2)]$ donc il existe un réel c de $[1; 2]$ tel que $f(c) = 1$.

EXERCICE 2 : 1. $I_{n+1} = \int_1^e f_{n+1}(t) dt = \int_1^e \frac{(\ln t)^{n+1}}{t^2} dt$. On utilise une intégration par parties en posant $u' = \frac{1}{x^2}$ et $v = (\ln x)^{n+1}$; d'où $u = \frac{-1}{x}$ et $v' = (n+1) \frac{1}{x} (\ln x)^n$.

Ainsi $I_{n+1} = \left[\frac{-(\ln t)^{n+1}}{t} \right]_1^e - \int_1^e \frac{-(n+1)(\ln t)^n}{t} dt = -\frac{1}{e} + (n+1) \int_1^e \frac{(\ln t)^n}{t} dt = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$.

2. Utilisons la récurrence pour montrer que $\frac{1}{n!} I_n = 1 - \frac{1}{e} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$: Pour $n = 0$, $\frac{1}{0!} I_0 = I_0 = \int_1^e \frac{1}{t^2} dt = \left[\frac{-1}{t} \right]_1^e = 1 - \frac{1}{e}$ et $1 - \frac{1}{e} \sum_{k=0}^0 \frac{1}{k!} = 1 - \frac{1}{e}$; donc la propriété est vérifiée pour $n = 0$.

Supposons que, pour un certain n , $\frac{1}{n!} I_n = 1 - \frac{1}{e} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et montrons que cette propriété est vraie pour $n + 1$:

$$\frac{1}{(n+1)!} I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \left(-\frac{1}{e} + (n+1)I_n \right) = \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{-1}{e} \right) + \frac{1}{n!} I_n = \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{-1}{e} \right) + 1 - \frac{1}{e} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1 - \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}.$$

Donc la propriété est vraie pour tout entier naturel n .

3. Les fonctions $\ln x$ et $x \mapsto x^n$ sont croissantes sur $[1; e]$, donc $\ln 1 \leq (\ln x)^n \leq \ln e$, soit $0 \leq (\ln x)^n \leq 1$.

Par les propriétés de l'intégrale, on a $\int_1^e \frac{0}{t^2} dt \leq I_n \leq \int_1^e \frac{1}{t^2} dt$, d'où $0 \leq I_n \leq \left[\frac{-1}{t} \right]_1^e = 1 - \frac{1}{e} < 1$.

4. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n! = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} = 0$. Comme $0 \leq \frac{I_n}{n!} \leq \frac{1}{n!}$, par le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{n!} = 0$.

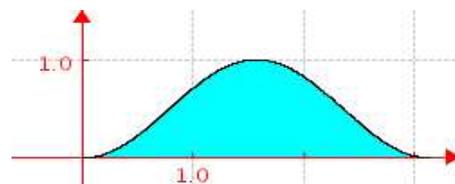
5. $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{e} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e$.

EXERCICE 3 : 1. Représentation graphique du domaine (D):

2. De $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$, on tire $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$, et $\sin^2 x =$

$$\frac{1 - \cos(2x)}{2}; \text{ puis } \sin^4 x = \left(\frac{1 - \cos(2x)}{2} \right)^2 = \frac{1 - 2\cos(2x) + \cos^2(2x)}{4} =$$

$$\frac{1 - 2\cos(2x) + \frac{\cos(4x) + 1}{2}}{4} = \frac{3 - 4\cos(2x) + \cos(4x)}{8} = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}.$$



3. Une primitive de $\cos(2x)$ est $\frac{1}{2} \sin(2x)$ et une primitive de $\cos(4x)$ est $\frac{1}{4} \sin(4x)$, donc $\int_0^\pi \sin^4(t) dt =$

$$\int_0^\pi \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{8}\cos(4t) \right) dt = \left[\frac{3}{8}t - \frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{1}{32}\sin(4t) \right]_0^\pi = \frac{3\pi}{8}.$$

4. La courbe (C) en tournant autour de l'axe (Ox) engendre un solide (S) dont le volume est déterminé par

$$\int_0^\pi \pi (\sin^2)^2(t) dt = \pi \int_0^\pi \sin^4(t) dt = \frac{3\pi^2}{8} \text{ unités de volume} = 3\pi^2 \text{ cm}^3 \text{ (puisque l'unité du repère est de 2 cm).}$$