

EXERCICE 1 : La proportion d'huîtres de chaque catégorie est: pour les petites 13 % ; pour les moyennes 54 % ; pour les grandes 33 %.

Catégorie	P	M	G
Probabilité d'erreur	0,035	0,06	0,045

a) L'arbre des probabilités :

b) On utilise la formule des

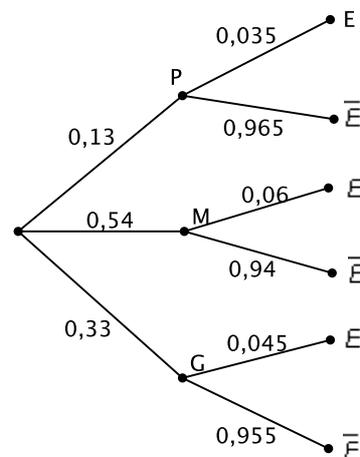
probabilités totales : $p(E) = p(E \cap P) + p(E \cap M) + p(E \cap G) =$

$$p(P)p_P(E) + p(M)p_M(E) + p(G)p_G(E) =$$

$$0,13 \times 0,035 + 0,54 \times 0,06 + 0,33 \times 0,045 = 0,0518.$$

c) La probabilité qu'une huître soit moyenne sachant qu'elle a été mal triée est

$$\text{définie par } p_E(M) = \frac{p(E \cap M)}{p(E)} = \frac{0,54 \times 0,06}{0,0518} = 0,625.$$



EXERCICE 2 : 1. La fonction f est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme composée et

$$\text{somme de fonctions qui le sont, et } f'(x) = \frac{e^x + 1}{e^x + x} - 1 = \frac{e^x + 1 - (e^x + x)}{e^x + x} = \frac{1 - x}{e^x + x}$$

qui est du signe de $1 - x$ car le dénominateur est strictement positif sur $[0; +\infty[$. Donc la fonction f est croissante sur $[0; 1]$ et décroissante sur $[1; +\infty[$.

$$2. \text{ Pour tout réel } x \text{ de } [0; +\infty[, f(x) = \ln(e^x + x) - x = \ln(e^x + x) - \ln(e^x) = \ln\left(\frac{e^x + x}{e^x}\right) = \ln\left(1 + \frac{x}{e^x}\right).$$

On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$, puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{e^x}\right) = 1$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

$$\text{On a } f(0) = \ln(1 + 0) - 0 = 0.$$

2. La courbe C admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$ puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

3. La fonction f admet un maximum en $x = 1$ qui vaut $f(1) = \ln(e + 1) - 1$. La fonction f est continue et croissante de $[0; 1]$ dans $[0; \ln(e + 1) - 1]$ et décroissante de $[1; +\infty[$ dans $[\ln(e + 1) - 1; 0[$.

Ainsi si $m < 0$, l'équation $f(x) = m$ n'a aucune solution;

si $m = 0$, l'équation $f(x) = m$ a une solution unique qui est 0;

si $0 < m < \ln(e + 1) - 1$, l'équation $f(x) = m$ a deux solutions, l'une dans $[0; 1]$ et l'autre dans $[1; +\infty[$;

si $m = \ln(e + 1) - 1$, l'équation $f(x) = m$ a une solution unique qui est 1;

si $m > \ln(e + 1) - 1$, l'équation $f(x) = m$ n'a pas de solutions.

EXERCICE 3 : 1. Étude de la parité de la fonction f : L'intervalle $] - 1; 1[$ est centrée en 0.

$$\text{Pour tout } x \text{ de }] - 1; 1[, f(-x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -f(x), \text{ car pour tout réel } a \text{ et } b > 0, \ln\left(\frac{a}{b}\right) = -\ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Donc la fonction f est impaire. On en déduit que la courbe C admet l'origine O comme centre de symétrie.

2. Pour tout x de $] - 1; 1[, f(x) = \ln(1 - x) - \ln(1 + x)$. La fonction f est dérivable sur $] - 1; 1[$ comme somme et

composée de fonctions qui le sont, et $f'(x) = \frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1+x} = \frac{-2}{1-x^2}$ qui est du signe de -2 car le dénominateur est

strictement positif sur $] - 1; 1[$, soit $f'(x) < 0$. Donc la fonction f est strictement décroissante sur $] - 1; 1[$.

$$3. \lim_{\substack{x \rightarrow +1 \\ x < 1}} \frac{1-x}{1+x} = 0^+, \text{ donc } \lim_{\substack{x \rightarrow +1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty. \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{1-x}{1+x} = +\infty \text{ puisque } \lim_{x \rightarrow -1} 1-x = 2 \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} 1+x = 0^+, \text{ donc}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = +\infty. \text{ On pouvait aussi utiliser la parité de la fonction } f.$$

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 2$, par $u_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$.

a) Pour tout entier naturel $n \geq 2$, $u_n = f\left(\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{1+1/n}{1-1/n}\right) = \ln\left(\frac{(n+1)/n}{(n-1)/n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \ln(n-1) - \ln(n+1)$.

b) Pour tout entier naturel $n \geq 2$, $0 < \frac{1}{n} < 1$, et la fonction f est décroissante sur $]0; 1[$. Ainsi, pour tout entier naturel $n \geq 2$, $0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < 1$, donc $f\left(\frac{1}{n+1}\right) > f\left(\frac{1}{n}\right)$, donc $u_{n+1} > u_n$. Donc la suite (u_n) est croissante.

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = f(0) = 0$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

5. On considère la fonction F définie sur $] -1; 1[$ par $F(x) = (x-1)\ln(1-x) - (x+1)\ln(x+1)$.

a) Pour montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f , on dérive F qui est dérivable comme somme et composée de fonctions qui le sont. $F'(x) = \ln(1-x) + (x-1)\left(\frac{-1}{1-x}\right) - [\ln(x+1) + (x+1)\left(\frac{1}{1+x}\right)] =$

$\ln(1-x) + 1 - \ln(x+1) - 1 = \ln(1-x) - \ln(x+1) = f(x)$, donc F est bien une primitive de f .

b) $I = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} f(x) dx = F\left(\frac{3}{4}\right) - F\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{3}{4} - 1\right)\ln\left(1 - \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{3}{4} + 1\right)\ln\left(\frac{3}{4} + 1\right) - \left[\left(\frac{1}{4} - 1\right)\ln\left(1 - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{4} + 1\right)\ln\left(\frac{1}{4} + 1\right)\right]$
 $= \left(-\frac{1}{4}\right)\ln\left(\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{7}{4}\right)\ln\left(\frac{7}{4}\right) + \frac{3}{4}\ln\left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{5}{4}\right)\ln\left(\frac{5}{4}\right)$.

c) $I = \left(-\frac{1}{4}\right)\ln\left(\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{7}{4}\right)\ln\left(\frac{7}{4}\right) + \frac{3}{4}\ln\left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{5}{4}\right)\ln\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{4} [\ln(4) - 7\ln\left(\frac{7}{4}\right) + 3\ln\left(\frac{3}{4}\right) + 5\ln\left(\frac{5}{4}\right)] =$
 $\frac{1}{4} [\ln 4 - 7\ln 7 + 7\ln 4 + 3\ln 3 - 3\ln 4 + 5\ln 5 - 5\ln 4] = \frac{1}{4} [-7\ln 7 + 3\ln 3 + 5\ln 5] = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{3^3 \times 5^5}{7^7}\right) = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{84375}{823543}\right)$.