

CORRECTION DEVOIR SURVEILLE N° 6

EXERCICE 1 : Partie A : Il s'agit d'un schéma de Bernoulli avec $2n$ lancers et une probabilité de succès pour

chaque lancer de $\frac{1}{2}$. La probabilité d'obtenir 4 piles en lançant 8 fois la pièce est $= \binom{8}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^{8-4} = \frac{70}{2^8} = \frac{35}{128}$ et la

probabilité d'obtenir 6 piles en lançant 12 fois la pièce est $= \binom{12}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^{12-6} = \frac{924}{2^{12}} = \frac{231}{1024} < \frac{280}{1024} = \frac{35}{128}$; donc on a plus de chance d'obtenir 4 piles en lançant 8 fois la pièce que d'obtenir 6 piles en lançant 12 fois la pièce.

On a $P(n) = \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-n} = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}}$; de plus $P(n+1) = \binom{2(n+1)}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2(n+1)-(n+1)} = \binom{2(n+1)}{n+1} \frac{1}{2^{2n+2}}$.

D'où, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{P(n+1)}{P(n)} = \frac{\binom{2(n+1)}{n+1} \frac{1}{2^{2n+2}}}{\binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}}} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \times \frac{1}{4} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2(n+1)}$.

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est une loi binomiale de paramètres $2n$ et $\frac{1}{2}$; d'où

$p(X = k) = \binom{2n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}$. L'espérance mathématique de X est égale au produit des paramètres $= n$.

Partie B : $P(A) = P(\text{« obtenir deux boules rouges » ou « obtenir deux boules jaunes »}) = P(\text{« obtenir deux boules$

rouges »}) + $P(\text{« obtenir deux boules jaunes »}) = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}} + \frac{\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{7}{15} + \frac{1}{15} = \frac{8}{15}$. $P(B) = 1 - P(A) = \frac{7}{15}$.

La variable aléatoire X prend les valeurs 0, 1 et 2. On a $P(X = 0) = P(\text{« obtenir deux boules jaunes »}) = \frac{1}{15}$;

$P(X = 2) = P(\text{« obtenir deux boules rouges »}) = \frac{7}{15}$; et $P(X = 1) = P(\text{« obtenir une boule jaune et une boule rouge »}) =$

$\frac{7}{15}$. Son espérance mathématique est $E(X) = 0 \times \frac{1}{15} + 1 \times \frac{7}{15} + 2 \times \frac{7}{15} = \frac{7}{5}$.

EXERCICE 2 : Partie A : a) On a $f'(x) = (2x+a)e^{x^2+ax+b}$ et $f'(1,5) = 0$ d'où $a = -3$. De plus,

$f(1,5) = e^{1,5^2+1,5a+b} = e^{-1,25}$, d'où $1,5^2 + 1,5a + b = -1,25$ et $b = 1$.

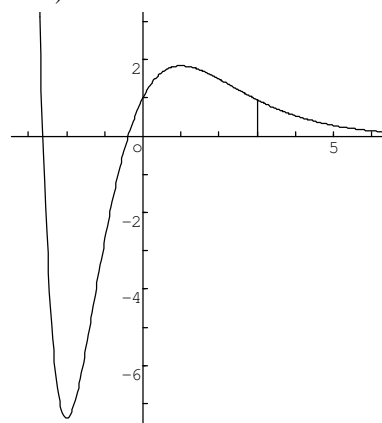
b) La droite d'équation $x = 1,5$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction f si pour tout x de $\mathbb{R}$,

on a $f(1,5+x) = f(1,5-x)$. On a $x^2 - 3x + 1 = (x-1,5)^2 - 1,25$, d'où $f(1,5+x) = e^{x^2-3x+1} = f(1,5-x)$.

Partie B : a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 3x + 1) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^\alpha e^{-x}) = 0$ pour α réel positif. b) $g'(x) = (-x^2 - x + 2)e^x$; le signe de cette dérivée est celui de $(-x^2 - x + 2)$. D'où le tableau de variations

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0
$g(x)$	$+\infty$	$-e^2$	$5/e$	0

d) Comme la fonction g est strictement positive sur $\mathbb{R}_+$, u_n est l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe C_g et les droites



d'équation $x = 0$ et $x = n$. u_3 est grisée sur le dessin.

e) $u_0 = \int_0^0 g(x) dx = 0$. On a $u_{n+1} = u_n + \int_n^{n+1} g(x) dx > u_n$, donc la suite (u_n) est strictement croissante.

f) $G'(x) = (x^2 + 3x + 1)e^{-x}$ donc G est une primitive de g . D'où

$u_n = G(n) - G(0) = (-n^2 - 5n - 6)e^{-n} + 6$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 6$. L'aire de la partie du

plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe C_g et l'axe des ordonnées vaut 6 unités d'aires.

Partie C : a) $h'(x) = 2x^2 + c^2$ d'où $h'(\ln 5) = 2(\ln 5)^2 + c^2 = 2 \times 1,5^2 + 1,5^2 = 0$ d'où $c = -3$;

$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = d = 2$ car $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$

b) Pour résoudre l'équation $h(x) = 0$, on pose $X = e^x$; l'équation devient $X^2 - 3X + 2 = 0$ qui a deux solutions : $X_1 = 1$ et $X_2 = 2$; d'où les solutions $x_1 = 0$ et $x_2 = \ln 2$.