

CORRIGÉ

DEVOIR MAISON N° 9

EXERCICE 1

On sait que la fonction F définie sur $[a; +\infty[$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f qui s'annule en a . Donc

$$F(x) = 2\ln(x), \text{ soit } f(x) = F'(x) = \frac{2}{x}. \text{ Ainsi } \int_a^x f(t)dt = \int_a^x \frac{2}{t}dt = \left[2\ln t\right]_a^x = 2\ln(x) - 2\ln(a).$$

Il faut donc que $\ln a = 0$, soit $a = 1$.

EXERCICE 2 1. La figure :

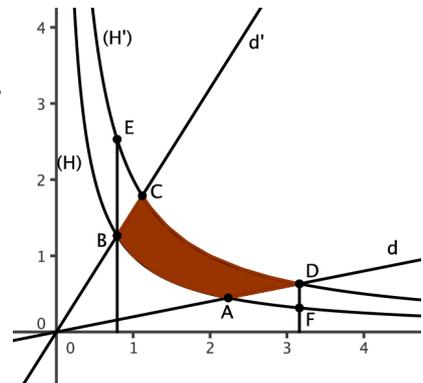
2. Pour calculer l'aire du quadrilatère curviligne ABCD en fonction de a et b , on calcule les coordonnées des points A, B, C et D: On suppose que $x > 0$.

L'abscisse de A vérifie l'équation $\frac{1}{x} = ax$, soit $x^2 = \frac{1}{a}$, soit $x = \frac{1}{\sqrt{a}}$, et son ordonnée est \sqrt{a} .

L'abscisse de B vérifie l'équation $\frac{1}{x} = bx$, soit $x^2 = \frac{1}{b}$, soit $x = \frac{1}{\sqrt{b}}$, et son ordonnée est \sqrt{b} .

L'abscisse de C vérifie l'équation $\frac{2}{x} = bx$, soit $x^2 = \frac{2}{b}$, soit $x = \sqrt{\frac{2}{b}}$, et son ordonnée est $\sqrt{2b}$.

L'abscisse de D vérifie l'équation $\frac{2}{x} = ax$, soit $x^2 = \frac{2}{a}$, soit $x = \sqrt{\frac{2}{a}}$, et son ordonnée est $\sqrt{2a}$.



L'aire S curviligne ABCD est égale à l'aire comprise entre les courbes (H) et (H') et les droites d'équation $x = \frac{1}{\sqrt{b}}$ et $x = \sqrt{\frac{2}{a}}$, auquel on soustrait l'aire des triangles curvilignes BCE et ADF :

$$\begin{aligned} \text{D'où } S &= \int_{x_B}^{x_D} \left(\frac{2}{t} - \frac{1}{t}\right) dt - \int_{x_A}^{x_D} \left(at - \frac{1}{t}\right) dt - \int_{x_B}^{x_C} \left(\frac{2}{t} - bt\right) dt = \left[\ln t\right]_{x_B}^{x_D} - \left[\frac{a}{2}t^2 - \ln t\right]_{x_A}^{x_D} - \left[2\ln t - \frac{b}{2}t^2\right]_{x_B}^{x_C} = \\ &= \ln \sqrt{\frac{2}{a}} - \ln \sqrt{\frac{1}{b}} - \left(\frac{a}{2} \times \frac{2}{a} - \ln \sqrt{\frac{2}{a}} - \frac{1}{2} + \ln \sqrt{\frac{1}{a}}\right) - \left(2 \ln \sqrt{\frac{2}{b}} - 1 - 2 \ln \sqrt{\frac{1}{b}} + \frac{1}{2}\right) = \ln \sqrt{b} - \ln \sqrt{a} = \ln \sqrt{\frac{a}{b}}. \end{aligned}$$

EXERCICE 3 : Soient A(1; 0), B(e; 1) et D le point d'intersection des deux tangentes.

L'équation de la tangente à C en A est $y = x - 1$; celle de la tangente à C en B est $y = \frac{x}{e}$. L'abscisse de D vérifie

l'équation $x - 1 = \frac{x}{e}$, soit $x = \frac{e}{e-1}$.

L'aire demandée est égale à $\int_{x_A}^{x_D} (t-1-\ln t)dt + \int_{x_D}^{x_A} \left(\frac{t}{e}-\ln t\right)dt = \left[\frac{t^2}{2}-t-(t\ln t-t)\right]_{x_A}^{x_D} + \left[\frac{t^2}{2e}-(t\ln t-t)\right]_{x_D}^{x_B} =$

$$\left[\frac{t^2}{2}-t\ln t\right]_{x_A}^{x_D} + \left[\frac{t^2}{2e}-t\ln t+t\right]_{x_D}^{x_B} = \frac{e^2}{2(e-1)^2} - \frac{e}{e-1} \ln\left(\frac{e}{e-1}\right) - \frac{1}{2} + \frac{e}{2} - e + e - \frac{e}{2(e-1)^2} + \frac{e}{e-1} \ln\left(\frac{e}{e-1}\right)$$

$= \frac{e}{e-1} = \frac{e^2-e}{2(e-1)^2} - \frac{1}{2} + \frac{e}{2} - \frac{e}{e-1} = \frac{e}{2(e-1)} + \frac{e-1}{2} - \frac{e}{e-1} = \frac{e^2-3e+1}{2(e-1)}$ en unité d'aires. Pour trouver l'aire en cm², on multiplie ce nombre par l'aire en cm² d'une unité d'aire, ici 8 cm², soit l'aire =

$$4 \frac{e^2-3e+1}{e-1} \approx 0,535.$$

EXERCICE 4

1. Les valeurs prises par la variable aléatoire X sont 0, 1, 2, 3 ou 4. Comme les bactéries présentes dans le milieu de culture se comportent indépendamment les unes des autres, on obtient :

$$p(X = 0) = p(\text{la bactérie } b_1 \text{ meurt et la bactérie } b_2 \text{ meurt}) = (p_1)^2;$$

$$p(X = 1) = p(\text{la bactérie } b_1 \text{ meurt et la bactérie } b_2 \text{ vit, ou la bactérie } b_2 \text{ meurt et la bactérie } b_1 \text{ vit}) = 2p_1 p_2;$$

$$p(X = 2) = p(\text{les bactéries } b_1 \text{ et } b_2 \text{ vivent, ou l'une meurt et l'autre se divise}) = (p_2)^2 + 2p_1 p_3;$$

$$p(X = 3) = p(\text{l'une des bactéries vit et l'autre se divise}) = 2p_2 p_3;$$

$$p(X = 4) = p(\text{les bactéries } b_1 \text{ et } b_2 \text{ se divisent}) = (p_3)^2.$$

On vérifie que $\sum_{k=0}^{k=4} p(X=k) = 1$: $\sum_{k=0}^{k=4} p(X=k) = (p_1)^2 + 2p_1 p_2 + (p_2)^2 + 2p_1 p_3 + 2p_2 p_3 + (p_3)^2 = (p_1 + p_2 + p_3)^2 = 1$.

2. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, une seule bactérie est présente dans le milieu de culture.

a) L'arbre de probabilité :

A l'instant $t = 1$, il y a 0, 1 ou 2 bactéries; et à l'instant $t = 2$, il y a 0, 1, 2, 3 ou 4 bactéries.

b) On désigne par A_1 l'événement « à l'instant $t = 1$, il y a une bactérie »;

B_2 l'événement « à l'instant $t = 2$, il y a deux bactéries ».

La probabilité de $p(A_1 \cap B_2) = p_2 p_3$;

et $p(B_2) = p(A_1 \cap B_2) + p(A_2 \cap B_2) = p_2 p_3 + p_3((p_2)^2 + 2p_1 p_3) = p_3(p_2)^2 + p_2 p_3 + 2p_1(p_3)^2$.

c) On appelle Y le nombre de bactéries à l'instant $t = 2$.

La loi de probabilité de Y :

Les valeurs prises par la variable aléatoire Y sont 0, 1, 2, 3 ou 4.

$$p(Y = 0) = p_1 + p_1 p_2 + (p_1)^2 p_3;$$

$$p(Y = 1) = (p_2)^2 + 2p_1 p_2 p_3;$$

$$p(Y = 2) = p_3(p_2)^2 + p_2 p_3 + 2p_1(p_3)^2;$$

$$p(Y = 3) = 2p_2(p_3)^3;$$

$$p(Y = 4) = (p_3)^3.$$

On vérifie que $\sum_{k=0}^{k=4} p(Y=k) = 1$ en utilisant l'arbre :

$$\sum_{k=0}^{k=4} p(Y=k) = p_1 + p_2(p_1 + p_2 + p_3) + p_3 \sum_{k=0}^{k=4} p(Y=k) =$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1.$$

