CORRIGÉ DEVOIR MAISON N° 10

EXERCICE 1

1. Le nombre de réacteurs ayant une panne sur un biréacteur peut être 0, 1 ou 2, donc les valeurs prises par X sont 0, 1, 2. Et $p(X = 0) = (1-p)^2$; $p(X = 1) = 2p(1-p)$; $p(X = 2) = p^2$.
Le nombre de réacteurs ayant une panne sur un quadriréacteur peut être 0, 1, 2, 3 ou 4, donc les valeurs prises par Y sont 0, 1, 2, 3, 4. Et $p(Y = 0) = (1-p)^4$; $p(Y = 1) = 4p(1-p)^3$; $p(Y = 2) = 6p^2(1-p)^2$; $p(Y = 3) = 4p^{23}(1-p)$; $p(Y = 4) = p^4$.
2. Un avion peut poursuivre son vol sans escale si au moins la moitié de ses réacteurs fonctionnent.
a) $p_B = p(X = 0) + p(X = 1) = (1-p)^2 + 2p(1-p) = (1-p)(1-p+2p) = (1-p)(1+p) = 1-p^2$.
Et $p_Q = p(Y = 0) + p(Y = 1) + p(Y = 2) = (1-p)^4 + 4p(1-p)^3 + 6p^2(1-p)^2 = (1-p)^2\,[(1-p)^2 + 4p(1-p) + 6p^2]$ $= (1-p)^2(3p^2 + 2p + 1)$.
b) $p_B - p_Q = 1 - p^2 - (1-p)^2(3p^2 + 2p + 1) = 1 - p^2 - (1 - 2p + p^2)(3p^2 + 2p + 1) = -3p^4 + 4p^3 - p^2 =$ $p^2(-3p^2 + 4p - 1)$.
c) Pour indiquer suivant les valeurs de p quel type d'avion présente la meilleure fiabilité, il faut trouver le signe de $p_B - p_Q = p^2(-3p^2 + 4p - 1)$, qui est du signe de $-3p^2 + 4p - 1$. Le discriminant est égal à $\Delta = 16 - 12 = 4 > 0$; il y a deux solutions réelles : $p_1 = \frac{-4+2}{-6} = \frac{1}{3}$ et $p_2 = \frac{-4-2}{-6} = 1$.

p	0		$\frac{1}{3}$		1
$p_B - p_Q$	0	−	0	+	0

Donc $p_B \leqslant p_Q$ si $0 \leqslant p \leqslant \frac{1}{3}$ et $p_B \geqslant p_Q$ si $\frac{1}{3} \leqslant p \leqslant 1$.
Ainsi, le biréacteur est plus fiable si $\frac{1}{3} \leqslant p \leqslant 1$, et le quadriréacteur est plus fiable si $0 \leqslant p \leqslant \frac{1}{3}$.

EXERCICE 2 : 1. Le nombre de tirages possibles de deux boules de l'urne est égal à $\binom{10}{2} = 45$.
$p(V) = \frac{\binom{4}{2}}{45} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$; $p(J) = \frac{\binom{6}{2}}{45} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$. $p(R) = p(J) + p(V \cap$ « il tourne la roue et est remboursé de sa participation »$) = \frac{1}{3} + \frac{2}{15}\times\frac{5}{8} = \frac{5}{12}$.
2. On appelle X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
a) Les valeurs prises par X sont $-m$, 0, $20-m$, $100-m$.
$p(X = -m) = p($« tirer deux boules de couleurs différentes »$) = 1 - p(V) - p(J) = \frac{8}{15}$;
$p(X = 0) = p(R) = \frac{5}{12}$; $p(X = 20-m) = p(V \cap$ « il tourne la roue et gagne 20 euros »$) = \frac{2}{15}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{30}$;
$p(X = 100-m) = p(V \cap$ « il tourne la roue et gagne 100 euros »$) = \frac{2}{15}\times\frac{1}{8} = \frac{1}{60}$.
b) $E(X) = -m\times p(X = -m) + 0\times p(X = 0) + (20-m)\times p(X = 20-m) + (100-m)\times p(X = 100-m) =$
$\frac{-8m}{15} + \frac{20-m}{30} + \frac{100-m}{60} = \frac{140-35m}{60} = \frac{28-7m}{12}$.
3. La valeur minimale de m pour que l'organisateur puisse espérer ne pas perdre d'argent doit vérifier $E(X) \leqslant 0$, soit $\frac{28-7m}{12} \leqslant 0$, soit $28 - 7m \leqslant 0$, soit $m \geqslant 4$. Donc la valeur minimale de m pour que l'organisateur puisse espérer ne pas perdre d'argent est égale à 4.